ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
STUDIA PEDAGOGICZNE z. 26

ŻÓŁKIEWSKI ZYGMUNT

PRÓBA KSZTAŁTOWANIA PODSTAWOWYCH STRUKTUR ALGEBRAICZNYCH W STARSZYCH KLASACH SZKOŁY PODSTAWOWEJ NA PRZYKŁADZIE POJĘCIA GRUPY

Wprowadzenie

Ostatnie dziesięciolecia to okres permanentnej modernizacji nauczania matematyki w wielu krajach. Podejmowanie wysiłków w tym zakresie inspirowane było olbrzymim rozwojem samej matematyki i jej zastosowań, nowymi osiągnięciami z psychologii i dydaktyki ogólnej, a przede wszystkim wynikało z potrzeb rozwojowych społeczeństw.

Jednym z elementów tego rozwoju jest systematyczne podnoszenie "ogólnej kultury matematycznej". Zdaniem Z. Krygowskiej "podstawowym trzonem tej kultury jest rozumienie matematyki jako symbolicznego uniwersalnego języka, w którym możemy opisać bardzo różnorodne treści oraz wyrażać szczególnie ścisłe i jasne rozumowanie prowadzące do rozwiązywania bardzo różnych problemów."[1]

Stąd wynikała konieczność prowadzenia różnorodnych działań w zakresie opracowywania nowych programów nauczania, wzbogacania metod aktywizujacy proces nauczania i uczenia się oraz poszukiwania nowoczesnych środków dydaktycznych. Na dobór treści do nowo konstruowanych programów nauczania miały wpływ nie tylko kierunki rozwoju samej matematyki, ale przede wszystkim tendencje w niej panujące.

Jedną z nich mocno zarysowującą się już od połowy naszego stulecia była tendencja integracji matematyki przez jej strukturalne ujęcia. Występowanie jej obserwujemy w całej historii rozwoju matematyki, gdzie pomimo wyodrębniania się i rozwoju szeregu dyscyplin oraz powstawania coraz to nowych gałęzi specjalistycznych obserwujemy powracanie do idei syntezy wiedzy matematycznej.

W wypracowanych programach nauczania wyraziła się ona w formie postulatu "uczenia matematyki mocno zespolonej za pomocą ogólnych pojęć kluczowych i struktur podstawowych.[2] Szczególną rolę w wiązaniu treści nauczania mogą odegrać takie pojęcia kluczowe jak: zbiór, relacja, odwzorowanie, działanie, morfizm itp. oraz podstawowe struktury algebraiczne takie jak: grupa, pierścień, ciało, przestrzeń wektorowa, algebra Boole'a itp.

Nie został jednak wypracowany dotychczas jednolity pogląd na to, w jakim zakresie te ogólne pojęcia i struktury mają być wprowadzone do programów szkolnych oraz jaką mają spełniać rolę w konstrukcji matematyki szkolnej. Czy mają one spełniać rolę dogodnej terminologii umożliwiać wiązanie wielu tematów odległych pojęciowo, czy też mają być przedmiotem nauczania i badania przez uczniów.

W niektórych rozwiązaniach metodycznych wprowadzenie tych struktur miało charakter formalny, bowiem były one określane i badane metodą akcjomatyczną. Takie ich ujęcie w procesie nauczania wywołało gwałtowną krytykę i spowodowało wycofanie się z tych radykalnych koncepcji.

Wśród przeciwników uwzględniania w matematyce szkolnej struktur algebraicznych w ten sposób znaleźli się również wybitni matematycy. Jednym z nich był R. Thom, który wyrażając swe stanowisko pisał "w końcu nie należy sądzić, że znajomość standardowych struktur daje wiedzę o matematyce, przeciwnie, struktury te reprezentują matematykę jedynie bardzo powierzchownie".[3] Stanowisku R. Thoma bardzo ostro przeciwstawił się J. Diéudonne pisząc "przegrana matematyki nowej nie jest usprawiedliwieniem dla powrotu ku dawnemu" układowi materiału szkolnego.

Również P. Hilton stwierdza "w gruncie rzeczy nowa matematyka nigdy nie miała być w jakimkolwiek sensie konkurencją dla dawnej; jej rola miała polegać na wzbogaceniu dawnej matematyki i zastąpieniu pewnych jej archaicznych fragmentów materiałem lepiej odpowiadającym współczesnym poglądom i potrzebom".[4]

W wielu zmodernizowanych programach nauczania rola struktur algebraicznych została sprowadzona tylko do dogodnej i integrującej terminologii.

Została więc ograniczona, ale i "... dla tej terminologii warto je wprowadzać - pisze Z. Krygowska - byle z pewną świadomością ich ograniczonej - przy obecnym stanie dydaktyki - roli."[5]

Włączenie do nauczania szkolnego podstawowych struktur matematycznych w szczególności struktur algebraicznych oraz określenia roli, jaką mają one spełniać na poszczególnych poziomach nauczania, pozostaje nadal problemem otwartym.

Chodzi o to, aby stały się one przedmiotem, nauczania oraz środkiem do rozwiązywania zagadnień w innych działach matematyki szkolnej. Poza tym chodzi również o wypracowanie nowych pomocy dydaktycznych, podręczników, zeszytów ćwiczeń, zestawów zadań itp., które zagwarantowałyby aktywną postawę uczniów w procesie kształtowania zamierzonych pojęć.

Dla rozwiązania tego problemu podejmowane są badania nad opracowaniem oraz wdrożeniem takich rozwiązań dydaktycznych, które z jednej strony zapewniałyby poprawne z punktu matematycznego wprowadzenie tych struktur, z drugiej zaś uwzględniałyby możliwości percepcyjne dzieci na różnych etapach ich rozwoju.

Na potrzebę podjęcia takich badań w naszym systemie wskazywał między innymi Z. Semadeni pisząc "należy prowadzić badanie w zakresie problematyki, a w wykazie tematów badawczych wymienia problem kształtowania pojęcia grupy."[6]

Uwzględniając otwartość problemu wprowadzania do matematyki szkolnej struktur algebraicznych i ich przydatność dla strukturalizacji treści, walory dydaktyczne w zakresie rozwijania aktywności matematycznej dzieci tkwiące w ich opracowaniu podjąłem przeprowadzenie eksperymentu dydaktycznego, dotyczącego wprowadzenia pojęcia grupy jako podstawowej struktury algebraicznej w starszych klasach szkoły podstawowej w warunkach naszych doświadczeń nauczania matematyki.

1. Przydatność ujawniania struktury grupy w szkolnym nauczaniu matematyki

Dotychczas obowiązujące programy nauczania charakteryzuje przeładowanie ich materiałem wielokrotnie obejmującym sporą ilość luźno ze sobą powiązanych tematów. To przeładowanie programów, "atomizacja" poszczególnych zagadnień, konieczność przekazania uczniom dużej liczby informacji powoduje, jak zauważa J. Zborowski, "że szkoła nie radzi sobie z przerobieniem programów w określonym czasie, a zarazem obciąża pamięć uczniów nadmiarem szczegółów, ktore nierzadko nie posiadają ani wartości użytkowych ani kształcących."[7] Ten stan rzeczy powoduje przeprowadzanie częstych zmian polegających w zasadzie na uszczuplaniu treści programowych.

Z drugiej jednak strony osiągnięcia oraz systematyczny i szybki rozwój nauk, zwłaszcza nauk matematyczno-przyrodniczych, stwarza potrzebę wprowadzania do programów nauczania coraz to nowszych, bardziej aktualnych treści. K. Lech wskazuje, że "narastająca wciąż gwałtownie i zmieniająca się wiedza współczesna nie daje się ująć w żadne, nawet ciągłe pęczniejące programy o charakterze tradycyjnym."[8]

Jak zatem pogodzić problem redukcji materiału nauczania z koniecznością uwzględnienia aktualnego stanu wiedzy?

W zakresie jego rozwiązania wysuwana jest przede wszystkim koncepcja strukturalizacji treści nauczanego przedmiotu.

Strukturę przedmiotu, jak wskazuje J. Bruner, należy uczynić "dominującym czynnikiem nauczania i wprowadzić nauczanie i uczenie się struktur w miejsce zwykłego opanowania faktów.[9] Precyzując pojęcie nauczania i uczenia się struktur pisze: "uchwycenie struktury przedmiotu jest to zrozumienie go w taki sposób, jaki pozwala na sensowne powiązanie z nim wielu elementów. Krótko mówiąc uczyć struktury, to uczyć się tego, jak rzeczy są wzajemnie powiązane.[10]

Znaczenie wprowadzonych do nauczania struktur według niego polega na pełnieniu przez nie czterech ważnych funkcji:[11]

1. Poznanie podstawowych struktur czyni przedmiot bardziej zrozumiałym.
2. Uczenie się strukturalne oddziaływuje na trwałość pamięci. Prowadzi ono do uogólnienia, stanowiącego ważną dla pamiętania "kondensację i reprezentację" szczególnych wypadków.[12]
3. Zrozumienie podstawowych zasad i pojęć (struktur) prowadzi do adekwatnego transferu ćwiczeń, gdyż aby uchwycić szczegół przypadku ogólnego, trzeba poznać nie tylko rzecz konkretną, ale także model.
   J. Zborowski stwierdza, że struktura ta - ów model pozwala zrozumieć inne podobne zjawiska i fakty, z którymi można się zetknąć.[13]
4. Dzięki opanowaniu struktur przedmiotu można zredukować przepaść między wiedzą zaawansowaną a elementarną, gdyż w spiralnym układzie programu zachowana zostaje ciągłość podstawowych pojęć i struktur w rozwiązywaniu napotykanych problemów na coraz wyższym poziomie.[14]

Matematyka szkolna stanowi szczególnie podatny grunt dla realizacji postulatu strukturalizacji treści nauczania. Jego realizację zapewnia między innymi wprowadzenie do materiału szkolnego podstawowych struktur matematycznych, w szczególności struktur algebraicznych. Z. Krygowska pisze, "znajomość i opanowanie tych struktur, posługiwanie się nimi w ujmowaniu rzeczywistości, to prawdziwe cele nauczania matematyki. Niektóre z tych struktur są tak elementarne, że byłoby słuszne posługiwanie się nimi od dzieciństwa.[15] Również K. Lech sugeruje "skromny materiał nauczania, objęty programem szkolnym daje wiele okazji do ukazania uczniom podstawowych struktur algebraicznych, do ujawniania analogii między różnymi, izolowanymi w pojęciu uczniów fragmentami matematyki szkolnej i to w sposób naturalny i dostępny młodzieży.[16]

Ujawnianie zatem w nauczaniu już od starszych klas szkoły podstawowej tych struktur z jednej strony stworzyłoby warunki do racjonalnej i bardziej oszczędnej organizacji materiału nauczania, z drugiej zaś wzbogaciłoby proces rozwijania u uczniów umiejętności matematycznych. Wprowadzone do nauczania struktury w pełni realizowałyby funkcje wymieniane przez J. Brunera.

1. Wprowadzenie na przykład pojęcia grupy począwszy od starszych klas szkoły podstawowej otwiera możliwości posługiwania się dogodną terminologią wiążącą wiele tematów opracowywanych na tym etapie nauczania. Zapobiegałoby to sztucznej izolacji poszczególnych zagadnień zmniejszających spoistość wewnętrzną matematyki szkolnej.

Dla zilustrowania integrującej roli pojęcia grupy wymieńmy kilka zagadnień objętych programem nauczania, w których można ujawnić jej strukturę:

- zbiór liczb całkowitych (wymiernych, rzeczywistych) ze względu na dodawanie,
- zbiór liczb wymiernych (rzeczywistych) bez zera ze względu na mnożenie.
- zbiór wektorów ze względu na ich dodawanie,
- zbiór przekształceń geometrycznych (zbiór przesunięć równoległych, obrotów wokół ustalonego środka, jednokładności o ustalonym środku) ze względu na ich składanie,
- zbiór izometrii własnych wielokątów foremnych.

2. Opanowanie struktur zapobiega zapominaniu szczegółów.

J. Zborowski zauważa "łatwo zapominamy szczegóły, o ile nie są one umiejscowione w zorganizowanym układzie."[17]

Zrozumienie i zapamiętanie struktury pozwala w razie potrzeby odtworzyć szczegóły. Na przykład stwierdzenie, że zbiór liczb całkowitych ze względu na dodawanie jest grupą abelową, pozwala z łatwością wymienić własności dodawania w tym zbiorze.

3. Z. Opial wskazuje na to, że każda ze struktur stanowi abstrakcyjny ogólny schemat, w którym mieści się zazwyczaj bardzo długi szereg konkretnych indywidualnych przypadków, co zwalnia od konieczności rozpatrywania każdego z nich z osobna i pozwala w każdym z nich automatycznie stosować wszystkie pojęcia, twierdzenia, wnioski i konstrukcje teorii ogólnej.[18]

Zrozumienie zatem struktury jest drogą wiodącą do "adekwatnego transferu ćwiczeń", gdyż pozwala przejść od schematu ogólnego do przypadków szczególnych.

Wprowadzenie do nauczania struktur algebraicznych stwarza poza tym możliwości rozwijania u dzieci umiejętności dostrzegania analogii, a w szczególności izomorfizmu omawianych struktur, co jest również pewną formą "transferu ćwiczeń".

4. Wprowadzenie struktur algebraicznych do nauczania już od starszych klas szkoły podstawowej stwarza możliwości systematycznego przybliżania uczniów do matematyki współczesnej. Na poziomie szkoły podstawowej ujawnianie tych struktur poprzez analizę różnorodnych modeli, przykładów i kontrprzykładów, jak zauważa St. Serafin, pozwala na właściwą "organizację w nowych kategoriach wiedzy matematycznej ... dopinguje do poszukiwania wspólnego schematu w różnych zagadnieniach, a więc powoduje działalność umysłową niezwykle ważną i charakterystyczną dla myślenia matematycznego."[19]

Realizacja koncepcji zaszczepienia i rozwijania u uczniów myślenia strukturami, pozwala zbliżyć się do matematyki jako nauki o strukturach określanych i badanych aksjomatycznie.

Struktury algebraiczne poza wymienionymi funkcjami dydaktycznymi otwierają duże możliwości rozwijania samodzielnego myślenia, spostrzegawczości, umiejętności formułowania wniosków itp.

Atrakcyjność i nowoczesność treści, a także możliwość ukazania szerokich jej zastosowań, aktywizują uczniów w procesie rozwijania umiejętności charakterystycznych dla działalności matematycznej.

J. Jakóbowski wskazuje, że "w dydaktyce współczesnej duży nacisk kładzie się na kształtowanie czynnej postawy uczniów wobec poznawanej przez nich rzeczywistości, wywieranie korzystnego wpływu na rozwój ich zdolności poznawczych, a przede wszystkim samodzielnego myślenia i działania."[20]

Realizację tego właśnie postulatu dydaktyki współczesnej zapewnia wprowadzenie do nauczania matematyki podstawowych struktur matematycznych, w szczególności struktury grupy.

2. Założenia dydaktyczne eksperymentu

Okres wstępny eksperymentu poświęcony został omówieniu z uczniami podstawowych pojęć teorio-mnogościowych takich jak: zbiór, podzbiór danego zbioru, element zbioru, relacji należenia elementu do zbioru, zawierania się zbiorów, pary uporządkowanej oraz iloczynu kartezjańskiego (bez użycia samej nazwy). Właściwy proces kształtowania pojęcia grupy, ze względu na złożoność tego pojęcia został rozbity na kilka etapów. Każdy z tych etapów poświęcony został doprowadzeniu uczniów do zrozumienia jednego z pojęć potrzebnych do określenia pojęcia grupy. Stanowiły one zatem wyodrębnione moduły dydaktyczne.

Założone cele w zakresie kształtowanych pojęć, jak i rozwijanych umiejętności dla poszczególnych modułów zostały zestawione w tabeli 1.

Tabela 1. Etapy kształtowania pojęcia grupy

Etap	Moduł dydaktyczny			Liczba godzin przeznaczonych na realizację
	Dotyczył pojęcia	Założone cele poznawze	Rozwijane umiejętności	
A	Działania wewnętrznego	Doprowadzenie uczniów do zrozumienia pojęcia działania wewnętrznego w danym zbiorze A jako funkcji $F : A \times A \to A$	1. Posługiwanie się tabelką jako optymalną formą opisu działania w zbiorze skończonym. 2. Określenie działań w zbiorach nieskończonych przy pomocy pewnego przepisu – wzoru. 3. Podawanie kontrprzykładów. 4. Formułowanie opisowej definicji działania.	6 - 7

Etap	Moduł dydaktyczny			Liczba godzin przeznaczonych na realizacje
	Dotyczył pojęcia	Założone cele poznawze	Rozwijane umiejętności	
B	Elementu neutralnego działania	Wprowadzenie pojecia neutralnego	1. Analizowanie tabelki działania pod kątem istnienia elementu neutralnego względem tego działania. 2. Podawanie przykładów działań w danym zbiorze posiadających lub nie posiadających elementu neutralnego. 3. Formułowanie opisowej definicji pojęcia elementu neutralnego. 4. Próba dowodu istnienia tylko jednego elementu neutralnego	
C	Elementu odwrotnego	Kształtowanie pojęcia elementu odwrotnego względem danego działania	1. Analizowanie tabelki działania pod kątem istnienia elementów odwrotnych wzgledem tego działania 2. Podawanie przykładów działań w danym zbiorze, w którym pewne lub wszystkie elementy będą posiadały elementy odwrotne. 3. Formuołwanie opisowej definicji pojęcia elementu odwrotnego.	4 - 5
D	Prawa łączności działania	Pogłębienie rozumienia prawa łączności działania określonego w danym zbiorze	1. Formułowanie prawa łączności działania. 2. Sprawdzanie prawa łączności dla działań określonych w dowolnych zbiorach. 4. Podawanie przykładów działań łącznych.	5 - 6
E	Grupy	Doprowadzenie uczniów do rozumienia pojęcia grupy	1. Analizowanie działania pod kątem własności tego działania jako metoda odkrywania struktury grupy w zbiorze skończonym. 2. Konstruowanie w danym zbiorze tabelki działania tak, aby ze względu na to działanie uzyskać grupę. 3. Dostrzeganie izomorfizmu grup. 4. Formułowanie definicji opisowej pojęcia grup.	6 - 7

Realizację założeń dydaktycznych poszczególnych etapów eksperymentu oparłem na opracowaniu cyklu przykładów.

Poprzez ich analizę uczniowie doprowadzani byli do zrozumienia pojęć, których kształtowanie założyłem w poszczególnych etapach.

W trakcie realizacji kolejnego etapu eksperymentu - nawiązywania do wiadomości z etapu poprzedniego, a nawet posługiwanie się tymi samymi lub podobnymi przykładami - sprzyjało dostarczeniu uczniom informacji uzupełniających lub korektywnych. Mogło to spowodować, że uczniowie, którzy nie opanowali uprzednio w sposób zadowalający danego pojęcia, osiągnęli jego zrozumienie.

W celu opisania struktury procesu kształtowania pojęcia założyłem, że badani dochodząc do zrozumienia pojęcia grupy przechodzą następujące stany:

W - stan wyjściowy.

A - stan, w którym uczeń osiąga zrozumienie pojęcia działania.

A′ - stan, w którym uczeń otrzymuje informacje dodatkowe dotyczące pojęcia działania.

A" - stan, w którym uczeń nie opanował pojęcia działania.

B - stan, w którym uczeń osiąga zrozumienie pojęcia elementu neutralnego.

B′ - stan, w którym uczeń otrzymuje informacje dodatkowe, dotyczące pojęcia elementu neutralnego.

B" - stan, w którym uczeń nie opanował pojęcia elementu neutralnego.

C - stan, w którym uczeń osiąga zrozumienie pojęcia elementu odwrotnego.

C′ - stan, w którym uczeń otrzymuje informacje dodatkowe.

C" - stan, w którym uczeń nie opanował pojęcia elementu odwrotnego.

D - stan, w którym uczeń wykazuje zrozumienie prawa łączności.

D′ - stan, w którym uczeń otrzymuje dodatkowe informacje dotyczące prawa łączności.

D" - stan, w którym uczeń nie opanował prawa łączności.

E - stan, w którym uczeń osiąga zrozumienie pojęcia grupy.

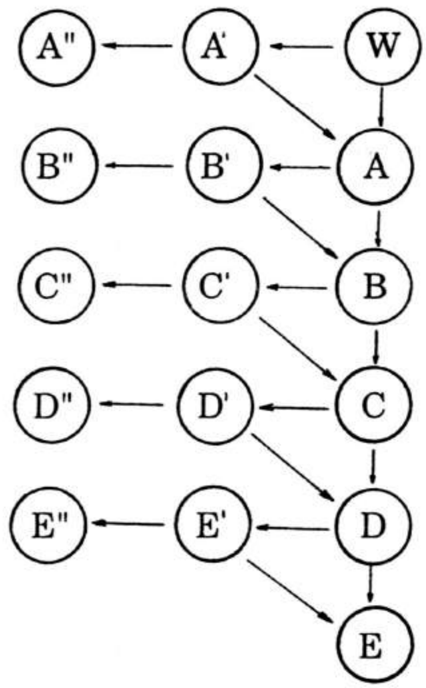
E′ - stan, w którym uczeń otrzymuje informacje dodatkowe dotyczące pojęcia grupy

E" - stan, w którym uczeń nie opanował pojęcia grupy.

Procesowi kształtowania pojęcia grupy nadano układ stanów[21] przedstawiony na diagramie 1.

Po zakończeniu realizacji każdego z etapów przeprowadziłem badania uzyskanych efektów w oparciu o zaprojektowane zestawy zadań. Przeprowadzenie badań po każdym etapie eksperymentu, pozwoliło ujawnić trudności oraz prześledzić postępy każdego ucznia na każdym etapie, w całości zaś eksperymentu opisać drogę, jaką przebywał każdy z nich dochodząc do zrozumienia pojęcia grupy.

Diagram 1.



Znajomość liczby uczniów osiągających dane stany, pozwoliła wyznaczyć procent badanych, którzy przechodzą od jednego stanu do drugiego, a tym samym opisać w sposób ilościowy proces kształcenia pojęcia grupy.

Eksperyment przeprowadzony został w 1989 r. w dwóch grupach uczniów klas V i VI zrekrutowanych na zasadzie dobrowolności. Łącznie zespół badanych liczył 32 uczniów, z których 17 było w wieku 13 lat, 15 zaś w wieku lat 12. Objęci eksperymentem uczniowie osiągali w zasadzie dobre wyniki w nauce.

Eksperyment został powtórzony w roku 1991 w zespole liczącym 24 uczniów klasy VI, z których 22 było w wieku 13 lat, 2 zaś w wieku 12 lat. Uczniowie danej klasy osiągali przeciętne wyniki w nauce.

3. Efektywność kształtowania pojęć występujących w trakcie ujawniania struktury grupy

Każdy z etapów eksperymentu zakończony został - jak już wspomniano - zbadaniem stopnia zrozumienia przez uczniów pojęcia kształtowanego na tym etapie. Rozumienie wprowadzonego pojęcia badani wykazywali poprzez rozwiązywanie zestawu zadań, które wymagały opanowania umiejętności związanych z tym pojęciem.[22]

Każdy z tych zestawów obejmował od 5 do 7 zadań podobnych formą do przykładów omawianych w procesie kształtowanego pojęcia. Zawierały one taki sam stopień trudności jak zadania analizowane w trakcie opracowywanego materiału na danym etapie eksperymentu.

Drugą formą sprawdzania opanowania kształtowanych pojęć była analiza prac domowych, polegających na rozwiązywaniu zadań ćwiczeniowych.

Uzyskane wyniki badań oraz analiza tych prac stanowiły podstawę do określenia stopnia opanowania rozwijanych umiejętności.

Zbiorcze zestawienie uzyskanych wyników ujęto w tabeli 2.

Tabela 2. Wyniki eksperymentu w zakresie kształtowania poszczególnych pojęć

Kształtowane pojęcie	I zespół		II zespół		Razem	
	p	n	p	n	p	n
Działanie	30	2	17	7	47	9
Element neutralny	26	6	20	4	46	10
Element odwrotny	25	7	19	5	44	12
Prawa łączności	21	11	20	4	41	15
Grupa	25	7	18	6	43	13

Oznaczenie: p - liczba badanych, którzy osiągnęli stan zrozumieni a wprowadzanego pojęcia

n - liczba badanych, którzy nie opanowali w sposób zadowalający kształtowanego pojęcia

Analizując drogę dochodzenia do zrozumienia pojęcia grupy przez poszczególnych uczniów stwierdzamy, że część z nich osiągała stany zrozumienia kolejno kształtowanych pojęć - działania, elementu neutralnego, elementu odwrotnego, prawa łączności, a w końcu pojęcia grupy bez przeszkód, przechodząc bezpośrednio z jednego stanu do następnego.

Część badanych dla zrozumienia któregoś z opracowywanych pojęć potrzebowała jednak informacji uzupełniających bądź korektywnych, po otrzymaniu których pokonywała występującą trudność i osiągała cel. Dla części badanych nieosiąganie zrozumienia któregoś z kształtowanych pojęć nie pozwoliło już na opanowanie dalszych.

Wyniki kolejnych badań pozwoliły określić ilość badanych, którzy osiągnęli stan zrozumienia kształtowanego pojęcia na danym etapie eksperymentu oraz liczbę tych, którym dla zrozumienia tego pojęcia należało dostarczyć informacji uzupełniających oraz tych, którzy nie pokonali trudności w jego opanowaniu.

Zestawienie tych wyników przedstawiono diagramem 2 (str. 151). Obok symboli literowych oznaczających poszczególne stany podano liczbę uczniów osiągających ten stan, zaś obok strzałki prowadzącej od stanu do stanu procent badanych, którzy przebywali tę drogę.

Dla stanów A, B, C, D druga podana liczba jest liczbą badanych, którzy przechodzą bezpośrednio od stanu poprzedniego do następnego.

Z układu stanów przedstawionych na diagramie 2 widać, że najkrótsza droga bez stanów, w których badany otrzymywał dodatkowe informacje prowadzące do zrozumienia pojęcia grupy, zawiera pięć kroków, najdłuższa zaś może posiadać ich aż dziesięć. Uzyskane dane pozwoliły wyznaczyć procent badanych, którzy dochodzili do pojęcia grupy na drodze zawierającej 5, 6, 7, 8, 9 lub 10 kroków.

Po przeprowadzeniu obliczeń oraz przy oznaczeniu przez p/n/ procentu badanych dochodzących do celu w n - krokach mamy:

p (5) = 50,0 %

p (6) = 21,4 %

p (7) = 5,4 %

p (8) = 0,0 %

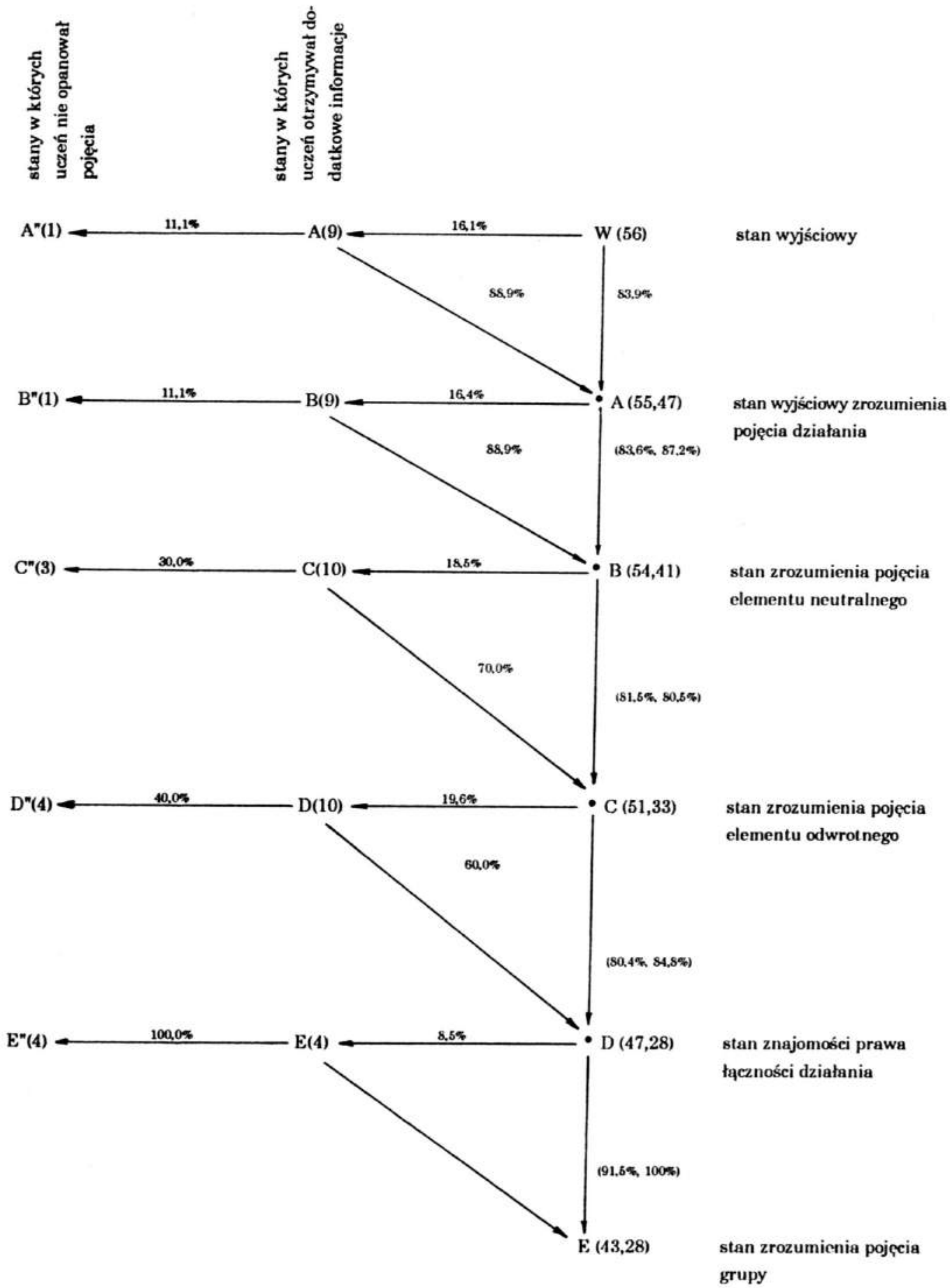
p (9) = 0,0 %

p (10) = 0,0 %

Widać z tego, że dla 50 % badanych droga kształtowania pojęcia grupy była najkrótsza, 27 % badanych musiało dla zrozumienia tego pojęcia przechodzić przez stany, w których otrzymywali dodatkowe informacje, zaś 23 % nie osiągnęła zrozumienia pojęcia grupy.

Przeprowadzony eksperyment wykazał, że istnieje możliwość włączenia w sposób jawny pojęcia grupy jako jednej z podstawowych struktur algebraicznych do nauczania matematyki poczynając od starszych klas szkoły podstawowej w warunkach naszego systemu jej nauczania.

Diagram 2. Schemat procesu kształtowania pojęcia



W wyniku wdrożenia zaprojektowanej koncepcji dydaktycznej wprowadzenia pojęcia grupy, jego zrozumienia osiągnęło 76 % badanych.

Ze względu na złożony charakter definicji grupy, gdyż w jej strukturze występuje koniunkcja trzech warunków, proces kształtowania pojęcia grupy został rozłożony na etapy.

Takie ujęcie pozwoliło pokonywać stopniowo trudności występujące w toku jego kształtowania. Najpierw w kolejnych etapach eksperymentu wprowadzono te pojęcia, na których buduje się pojęcie grupy. Ich zrozumienie było konieczne dla zdefiniowania samego pojęcia grupy. W momencie przystąpienia do ujawnienia struktury grupy 91 % uczniów - jak wykazały badania - dysponowało znajomością pojęcia działania, elementu neutralnego, elementu odwrotnego, a także rozumiało istotę prawa łączności, a więc było przygotowanych do przyswojenia pojęcia grupy.

Powracanie w kolejnych etapach do tych samych lub podobnych przykładów okazało się korzystne. Nawiązywanie bowiem do tych samych lub podobnych przykładów pozwoliło tym uczniom, którzy w danym etapie nie opanowali kształtowanego pojęcia, uzupełnić powstałe braki, a tym samym osiągnąć jego zrozumienie. Przeprowadzony eksperyment pokazał, że w procesie ujawniania struktury grupy występuje szereg momentów sprzyjających rozwijaniu umiejętności charakteryzujących dla działalności matematycznych takich jak schematyzowanie, matematyzowanie rozważanych sytuacji, analizowanie przykładów i kontrprzykładów, uogólnienie, abstrahowanie czy też definiowanie pojęć.

Opisywanie wykonywanych przez uczniów czynności konkretnych czy wyobrażeniowych przy pomocy tabelek, grafów czy symboli sprzyjało rozwijaniu umiejętności posługiwania się językiem matematycznym. Poddani eksperymentowi uczniowie wykazali również umiejętności konstruowania przykładów i kontrprzykładów. Potwierdza to wysoki procent poprawnych odpowiedzi w tych zadaniach, w których należało podać przykład działania bez elementu neutralnego czy też działań, w których tylko pewne elementy zbioru posiadały elementy odwrotne.

W realizowanej koncepcji występowało wiele sytuacji pozwalających uczniom na odkrywanie przez nich twierdzeń oraz wywołanie motywacji dla ich uzasadnienia. Poza tym koncepcja ta dała okazję do zapoczątkowania procesu kształtowania pojęcia izomorfizmu struktur, które w nauczaniu matematyki miałoby liczne zastosowanie.

Przeprowadzony eksperyment potwierdził, że wiek 12-13 lat, tj. okres, w którym zaczynają się rozwijać operacje formalne, jest sprzyjającym momentem do rozpoczęcia procesu kształtowania podstawowych struktur algebraicznych.

Wprowadzenie zaś tych struktur do matematyki szkolnej otworzyłoby duże możliwości optymalizacji treści nauczania począwszy od starszych klas szkoły podstawowej.

Założenia dydaktyczne eksperymentu zostały zrealizowane w czasie od 25 do 29 godzin lekcyjnych, a więc przeprowadzony eksperyment pozwala również określić orientacyjny czas potrzebny do realizacji tematyki związanej z pojęciem grupy w starszych klasach szkoły podstawowej.

4. Wnioski wynikające z przeprowadzonego eksperymentu

1. Ujawnienie w nauczaniu matematyki w szkole fundamentalnych struktur matematycznych, w szczególności struktur algebraicznych, jest odbiciem ogólnych tendencji występujących w matematyce współczesnej. Wprowadzanym do programów szkolnych treściom związanych ze strukturami algebraicznymi, między innymi z pojęciem grupy, powinno się nadać układ spiralny. Takie ich ujęcie zapewniłoby z jednej strony rozłożenie w czasie procesu kształtowania strony pojęciowej w zależności od możliwości percepcyjnych dzieci na różnych etapach ich rozwoju, z drugiej strony umożliwiłoby ukazanie szerokich zastosowań wprowadzanych pojęć.
2. W początkowej fazie opracowania struktur algebraicznych, a także struktury grupy, proces ich wprowadzenia powinien obejmować obserwacje różnorodnych modeli, schematyzację rozważanych sytuacji oraz analizę przykładów i kontrprzykładów. Oderwanie się z kolei od tych modeli doprowadziłoby do sformułowania warunków definiujących wprowadzane struktury. Dobór modeli oraz przykładów powinien zapewnić przeprowadzenie uczniów do czynności wykonywanych na przedmiotach materialnych, poprzez wyobrażeniowe do czynności formalnych.
3. Na dalszych etapach pracy ze strukturami, które przypadałyby już na okres szkoły ponadpodstawowej, podejściu do nich wskazane byłoby nadać charakter bardziej formalny.

   Mogą być tu już one określane aksjometrycznie, a także można by dążyć do udowodnienia w oparciu o przyjęte aksjometry kilku początkowych twierdzeń rozwijanych teorii.

4. W nauczaniu matematyki początkowo rola struktur algebraicznych sprowadzałaby się do uniwersalnego języka, w którym można opisywać wiele tematycznie odległych faktów. Główna tu ich rola to integracja materiału, a tym samym zapobieganie "atomizacji wiedzy". Pozwalałyby ukazać matematykę w sposób spójny, a nie podzielony na działy: arytmetyka, geometria czy algebra. W następnych fazach nauczania oprócz wyżej wymienionych funkcji mogą one wraz z wprowadzeniem pojęcia izomorfizmu stać się dogodnym narzędziem do rozwiązywania niektórych problemów.
5. Wprowadzenie do nauczania struktur algebraicznych sprzyja rozwijaniu tych umiejętności, które dla działalności matematycznej są istotne. Przeprowadzony eksperyment potwierdza występowanie w toku ich opracowania wielu sytuacji sprzyjających rozwijaniu takich umiejętności jak: schematyzowanie, matematyzowanie rozważanych sytuacji, analizowanie przykładów, abstrahowanie, uogólnianie, formułowanie definicji, zauważanie analogii i izomorfizmów oraz odkrywanie i dowodzenie twierdzeń.
6. Posługiwanie się w trakcie opracowania struktur różnego rodzaju symbolami, tabelkami schematami, grafami itp. sprzyja rozwijaniu języka matematycznego.

PRZYPISY

[1] Z. Krygowska: Niektóre tendencje występujące w matematyce współczesnej a nauczanie matematyki w szkole powszechnej. Matematyka nr 2/1975 s. 104

[2] Tendencje w metodach i środkach stosowanych w nauczaniu matematyki. Materiały UNESCO. Matematyka 3/1974 s. 158-168

[3] R. Thom: Matematyka "nowoczesna" pomyłka pedagogiczna i filozoficzna. Wiadomości Matematyczne XVIII/1974 s. 133

[4] P. Hilton: Fałszywe dychotomie w aktualnych poglądach na nauczanie matematyki i nauk przyrodniczych. Dydaktyka matematyki, tom 1/1982 s. 145

[5] Z. Krygowska: Niektóre tendencje występujące w matematyce współczesnej a nauczanie matematyki w szkole powszechnej. Matematyka nr 2/1975 s. 104

[6] Z. Semadeni: Jakie powinno być wykształcenie matematyczne osób nauczających młodsze dzieci. Matematyka 5/1975 s. 299-303

[7] J. Zborowski: Unowocześnianie metod nauczania. Warszawa 1966 s. 94

[8] K. Lech: Posłowie. W: J. Bruner: Proces kształcenia. Warszawa 1964 s. 101

[9] J. Bruner: Proces kształcenia. Warszawa 1964 s. 6

[10] Tamże, s. 13

[11] Tamże, s. 28-30

[12] K. Sośnicki: Struktura w procesie nauczania. Nowa Szkoła 12/1965 s. 18

[13] J. Zborowski: Unowocześnianie metod nauczania. Warszawa 1966 s. 98

[14] Tamże, s. 98

[15] Z. Korygowska: Dydaktyka matematyki. tom 1. Warszawa 1977 s. 15

[16] K. Lech: Posłowie. W: J. Bruner: Proces kształcenia. Warszawa 1965

[17] J. Zborowski: Unowocześnianie metod nauczania. Warszawa 1966 s. 98

[18] Z. Opial: Przedmiot i metody współczesnej matematyki. W: Pracy zbiorowej pod red. W. Jankowskiego: Wybrane zagadnienia z metodyki matematyki. Warszawa 1971 s. 31

[19] St. Serafin: Od gier do algebry. Wybrane zagadnienia nauczania matematyki w szkole średniej. Cz. III, Warszawa 1975 s. 26

[20] J. Jakóbowski: Programowanie czynności pedagogicznych u kandydatów na nauczycieli. Bydgoszcz 1970 s. 8

[21] B. Mazur: Metoda modelowania probabilistycznego w dydaktyce. Uniwersytet Warszawski 1975 s. 49

[22] Z. Dyrszlag: Kontrola rozumienia pojęć matematycznych w procesie dydaktycznym. Opole 1974 s. 17

Zusammenfassung

Das Problem des Komprosisses zwischen der Notwendigkeit der Reduzierung des Lehrstoffes und dem aktuellen Zustand des Wissens erfordert die Strukturalisierung der Lehrinhalte. In der Schulmathematik kann die Realisierung dieser Forderung durch die Einführung der algebraischen Grundstrukturen, insbesondere der Struktur der Gruppe, vor allem in höhere Klassenstufen gesichert werden.

Im Beitrag wurden die Annahmen, der Verlauf und die Bedingungen des Experiments vorgestellt. Es wurde auch darauf hingewiesen, da man durch das Aufdecken der Struktur der Gruppe auf dieser Lehrstufe viele bearbeitete Themen verbinden kann und daß es auch beim Entwickeln der Fertigkeiten, die für das Mathematikwirken von großer Bedeutung sind, behilflich sein kann. Das bietet auch die Möglichkeit, die Schulmathematik der zeitgenössischen modernen Mathematik näher zu bringen.