ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ
W BYDGOSZCZY
STUDIA PEDAGOGICZNE 1982 z. 10
Pedagogika Przedszkolna i Wczesnoszkolna /2/

MIECZYSŁAW PĄCZKOWSKI
WSP w Bydgoszczy

PROBLEMY METODYCZNE PRZY WPROWADZANIU NIEWIADOMEJ

1. Sposób wprowadzania niewiadomej w klasie I, a wyniki nauczania

Matematyka należy do trudnych przedmiotów w nauczaniu początkowym. Niepowodzenia uczniów w tym przedmiocie są często przedmiotem teoretycznych rozważań w pracach badawczych. O sprawach tych dyskutują nauczyciele praktycy. Z. Krygowska wymienia następujące główne źródła trudności uczniów w uczeniu się matematyki:

1/ abstrakcyjność pojęć matematycznych, których opanowanie wymaga bardzo dużej dyscypliny wewnętrznej i systematycznej pracy;
2/ warunki pracy szkoły i niedociągnięcia dydaktyki, specyfika matematyki wymaga bowiem elastycznej realizacji całego procesu nauczania,
3/ metody pracy nauczycieli, którzy obecnie nie nadążają za postępem w modernizacji treści matematycznych.

Podobne sformułowanie znajdziemy w pozycjach L. Jeleńskiej, Z. Cydzik, H. Moroza, J. Hawlickiego i innych. Badania nad opanowaniem nowych treści programu matematyki w kl. I-III prowadzone w Polsce i w innych krajach pozwoliły Z. Semadeniemu na stwierdzenie, że "dzieci w wieku 7-10 lat są w stanie pojąć znacznie więcej niż uważano. Nauczanie początkowe matematyki może zawierać treści abstrakcyjne, a podstawowe pojęcia współczesnej matematyki /np. pojęcia zbioru, funkcji, relacji/ można sformułować w języku dostępnym dzieciom w tym wieku"[1]. Aktualne tendencje w nauczaniu matematyki w kl. I-III zmierzają ku rozwojowi zdolności matematycznych wraz ze zrozumieniem systemu numeracji i używanych algorytmów. Działalność ucznia na lekcji winna ulec takiemu usprawnieniu, by umożliwić dziecku większą swobodę w wyborze strategii i techniki rachunkowej. Z. Krygowska radzi rozbudzić intelekt dziecka przez umożliwienie mu niezależnego, niczym nie skrępowanego działania[2].

C. Gaulin dokonując syntezy badań nad dydaktyką matematyki naświetlił rysujące się tu tendencje:

1/ przechodzenia od biernego odbioru nauczania podającego do aktywnego zaangażowania w uczeniu się matematyki /uczenia się przez czynność/,

2/ elastycznej organizacji i łączenia uzupełniających się technik nauczania,

3/ inicjowania procesu uczenia się od różnych typów sytuacji problemowych,

4/ stosowania w nauczaniu matematyki rozmaitych środków graficznych[3].

2. Założenia metodologiczne

W publikacji tej pragnę przedstawić współczesne poglądy powstałe wokół wprowadzenia niewiadomej w klasie pierwszej, jak również nieliczne badania z tego zakresu prowadzone w Zakładzie Nauczania Początkowego. W dalszej treści - na podstawie zebranego materiału, zamierzam odpowiedzieć na pytanie, który sposób /metoda/ wprowadzenia niewiadomej w klasie pierwszej, sugerowany w licznych publikacjach, jest najskuteczniejszy, czyli przystępny dla ucznia klasy pierwszej, gwarantuje zrozumienie problemu matematycznego i umożliwia stosunkowo łatwe przejście od wiadomości do umiejętności.

Założyłem, że najlepsze wyniki w nauczaniu gwarantuje tu zrozumienie przez dziecko związków odejmowania z dodawaniem. W realizacji zamierzeń zastosowano metodę sondażu diagnostycznego popartą eksperymentem pedagogicznym. Grupą eksperymentalną była klasa, w której zastosowano założenia przyjęte w hipotezie roboczej. Rolę klas kontrolnych spełniały grupy uczniowskie, w których stosowano inny sposób wprowadzenia niewiadomej. W gromadzeniu materiału empirycznego stosowano następujące techniki badawcze: sprawdziany, ankiety wypełniane przez nauczycieli, konspekty prowadzonych lekcji. Materiał empiryczny zebrałem z prac badawczych prowadzonych w ramach seminarium magisterskiego studiów zaocznych i eksternistycznych. W toku postępowania naukowego stosowano wtedy właściwe ustalenia metodologiczne. Liczba zmiennych, dobór odpowiednich wskaźników jak również przyjęcie całej procedury badań odpowiadały wymogom prac o charakterze naukowym.

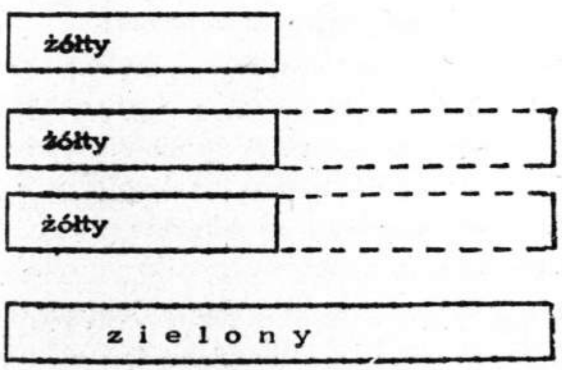
3. Poglądy teoretyczne na temat metodycznego opracowania niewiadomej "x"

Prace eksperymentalno-badawcze nad uelastycznieniem metodyki algebry z możliwością wprowadzenia tej trudnej treści już w klasie pierwszej zapoczątkowali u nas prawdopodobnie H. Moroz i Z. Krygowska w ośrodku krakowskim.

H. Moroz uwzględnia długi cykl przygotowania uczniów do wprowadzenia niewiadomej. Już w pierwszych tygodniach nauki, przy wprowadzeniu liczby i działań wykorzystuje klocki. Dzieci mając dwa klocki podporządkowały trzeci tak, aby jego długość była równa sumie długości obu składowych klocków lub różnicy tych klocków[4].

Tok postępowania przy wprowadzeniu niewiadomej wg Moroza jest następujący: do koperty schowano klocek o niewiadomej długości. Jeżeli do tego klocka dodasz klocek żółty, otrzymasz w sumie klocek zielony. Oblicz długość klocka schowanego w kopercie.

Czynności:



ze wzoru trzeciego czytamy

= 7 - 3

= 4

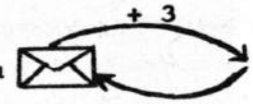
Znak  oznacza rysunek koperty, w której schowano klocek. W dalszej pracy rysunek koperty zastąpimy znakiem "x"

3 +  = 7

 = 7 - 3

 = 4

$3 + x = 7$
$x = 7 - 3$
$x = 4$

To samo zadanie możemy przedstawić za pomocą grafu 

Porównując sposób rozwiązania zadań na grafach i z użyciem klocków łatwo zauważamy nieścisłość matematyczną, która może utrudniać dziecku zrozumienie sposobu stosowania niewiadomej. Przy ułożeniu klocków, niewiadomy klocek powinien być umieszczony na rysunku na pierwszym miejscu tak, jak jest to zastosowane przy grafie. H. Moroz radzi rozwiązywanie również potraktować jako ćwiczenie utrwalające związki między operacją prostą i odwrotną np. $5 + x = 7$. Uczniowie obliczają niewiadomą nie przez odgadnięcie, lecz w oparciu o znajomość związków między składnikami a otrzymaną sumą $x = 7 - 5$, $x = 2$.

Wielkim entuzjastą wprowadzenia niewiadomej "x" do klas niższych szkoły podstawowej była M. Cackowska z Ośrodka Metodycznego w Lublinie[5]. M. Cackowska uważa, że algebraiczny sposób rozwiązywania zadań sprzyja rozwijaniu myślenia dzieci, ułatwia rozwiązanie zadań. Odnajdywanie niewiadomej przy zastosowaniu metod arytmetycznych wymaga odwołania się do rozwiniętego wnioskowania i wielu innych kombinacji myślowych. W metodzie algebraicznej niewiadoma jest od razu uchwytna i występuje przed uczniem w formie konkretnej. Kierowanie działalnością umysłową jest tutaj w znacznej mierze ułatwione. Dokładny i długi jest cykl wprowadzenia niewiadomej sugerowany przez M. Cackowską. Można tu dostrzec kilka etapów:

1. Wprowadzenie jednocześnie dwóch działań np.

$3 + 4 = 7 \quad 4 + 3 = 7 \quad 7 - 3 = 4 \quad 7 - 4 = 3$

$3 \cdot 4 = 12 \quad 4 \cdot 3 = 12 \quad 12 : 3 = 4 \quad 12 : 4 = 3$

2. Zapoznanie uczniów z terminami: składniki, suma i odjemna, odjemnik, różnica, czynniki, iloczyn, dzielna, dzielnik, iloraz.
3. Wprowadzenie niewiadomej np. x + 3 = 7, x - 3 = 4, 7 - x = 4, 12 : x = 4, 3 . x = 12
4. Wprowadzenie do wzorów oznaczeń - część i całość

   x + 3 = 7

   x + . = 7

   x = .. - .
5. Przekształcenie zadań w trzech kierunkach

   7 - 4 = 3   7 - 3 = 4   3 + 4 = 7. Nie zmieniając treści uczniowie powinni modelować warunki zadania, bądź zmieniać formę pytania.
6. Wprowadzenie oznaczeń literowych

   a + b = b + a

   wprowadzenie formuł

   a + b = c   a - b = c

   a = c - b   a = c + b

   b = c - a   b = a - c

   Przyznać należy, że opracowania M. Cackowskiej są bardzo dokładne, przystępne dla nauczyciela praktyka, jednakże stanowczo za trudne dla dzieci klasy pierwszej. Przy obliczaniu niewiadomej dziecko dość swobodnie operuje nazwami składniki - suma. Trudności rodzą się przy stosowaniu nazw odjemna, odjemnik, różnica - szczególnie wtedy, gdy suma staje się odjemną, a jeden ze składników różnicą. M. Cackowska zdawała sobie sprawę z tych trudności. Dla ułatwienia radzi stosować nazwy część i całość i odpowiednio oznaczać je kropkami.

Nieco inny jest sposób metodycznego opracowania niewiadomej proponowany przez J. Hawlickiego. Autor licznych publikacji metodycznych z matematyki radzi przystąpić do wprowadzenia "x" po dokładnym zapoznaniu dzieci z dodawaniem i odejmowaniem jako działaniami odwrotnymi. Hawlicki radzi wprowadzić i dobrze utrwalić związek dodawania z odejmowaniem, zrozumienie nazw składniki i suma. Nie radzi przy odejmowaniu stosować nazw odjemna, odjemnik, różnica. Pisze na ten temat - "Oddzielne terminy w odejmowaniu utrudniają zrozumienie związku odejmowania z dodawaniem. Na przykład uczeń wyprowadził z dodawania 5 + 4 = 9 odejmowanie 9 - 4 = 5 i wyjaśnia - od sumy 9 odjąłem składnik 4 i otrzymałem składnik 5. Nauczyciel każe mu nazwać w odejmowaniu 9 - 4 = 5 sumę 9 odjemną, składnik 4 odjemnikiem, składnik

5 różnicą. Uczeń powinien teraz odpowiedzieć: od odjemnej 9 odjąłem odjemnik 4 i otrzymałem różnicę 5. Wstawmy się w jego położenie. Uczeń przecież nie widzi potrzeby nazywania każdej z liczb w tej samej równości dwoma różnymi terminami"[6]. J. Hawlicki mocno natomiast podkreśla ważność pojęcia równości i związek między dwoma działaniami. Uczeń w zadaniu 5 + 4 = 9 powinien sam ułożyć, obliczyć używając właściwych nazw trzy dalsze zadania 5 + 4 = 9, 9 - 4 = 5, 9 - 5 = 4 /J. Galant, Hawlicki/. Po dokładnym przygotowaniu ucznia do wprowadzenia niewiadomej samo poznanie "x" jest u Hawlickiego bardzo proste. "Nauczyciel poleca, pisze Hawlicki, wszystkim uczniom zamknąć na chwilę oczy. Gdy je odsłaniają widzą na tablicy zapis x + 4 = 9. Po wprowadzeniu nazwy iks nauczyciel pyta - "Powiedzcie jak można nieznaną liczbę obliczyć... Znana jest druga liczba 4, która jest składnikiem, znana jest trzecia liczba 9, która jest sumą, ale pierwszy składnik jest nieznany. Aby obliczyć, należy od znanej sumy odjąć znany składnik 9 - 4 = 5.

Dalej następuje rekonstrukcja pierwotnej równości, czyli w tym wypadku sprawdzenie zadania. Po opisowym rozwiązaniu równania nauczyciel zapoznaje dzieci ze sposobem algebraicznego zapisu. H. Zalewska podaje cztery etapy rozwiązywania zadań z zastosowaniem metody równości:

a/ analiza treści zadania,
b/ wprowadzenie pojęcia niewiadomej /wyraz z symbolem "x"/,
c/ zapis równania odpowiadającego warunkowi danemu w zadaniu,
d/ rozwiązywanie równań za pomocą grafów lub inną metodą[8].

H. Zalewska niewiadomą "x" wprowadza do treści prostego zadania. Liczba niewiadoma zastąpiona jest wyrażeniem "kilka". Zadanie: na boisku bawiło się kilku chłopców i 3 dziewczynki. Razem było 9 dzieci. Ilu było chłopców? Zapis początkowy znany jest dzieciom  + 3 = 9. Iks H. Zalewska wprowadza przy zastosowaniu grafów:

$$x \underset{-3}{\overset{+3}{\rightleftarrows}} 9$$

H. Siwek proponuje jedną lekcję poświęcić na zapoznanie dzieci z literą "x". Wprowadzenie równań rozpoczyna od zadania z liczbą, np. jakaś nieznana liczba mówi do liczby 8 - jesteś ode mnie większa o 2. Jaka to liczba ? Niewiadomą "x" H. Siwek wprowadza do grafu ułożonego do treści powyższego zadania $x \underset{-2}{\overset{+2}{\rightleftarrows}} 8$

Co powie liczba 8 do "x" ? Uczniowie powinni odpowiadać - Jesteś ode mnie o 2 mniejsza. Uczeń dorysowuje strzałkę. Powstaje więc sytuacja następująca: $x \underset{-2}{\overset{+2}{\rightleftarrows}} 8$. Z zadania $x + 2 = 8$ otrzymamy $8 - 2 = x$. Łatwo obliczyć, że "x" jest 6[9]. Z. Semadeni i E. Puchalska radzą główną uwagę zwrócić na równanie. Samą głoskę "x" mogą dzieci wyodrębnić z wyrazów zawierających głos - iks, a znak graficzny tej głoski nie przedstawia trudności. "Celem lekcji - czytamy w artykule - na której wprowadzamy równanie, powinno być zrozumienie przez dzieci pojęcia równania, pojęcia niewiadomej w równaniu oraz rozumienie tego, co to znaczy, że jakaś liczba spełnia równanie[10]. Punktem wyjścia przy wprowadzeniu równania z niewiadomą jest zadanie z treścią. Np. - na postoju stało 6 taksówek. Po chwili kilka przyjechało i wszystkich było 10. Przy zapisie formuły /równania/ zaistnieje konieczność zapisu czyli też oznaczenia liczby taksówek, które dojechały. Nauczyciel wyjaśnia, iż w treści zadania nie ma podanej liczby taksówek. Zamiast liczby postawimy więc znak "x". Z treści zadania powstaje równanie $6 + x = 10$. Rozwiązywanie pierwszych równań powinno odbywać się za pomocą kartoników z liczbami, a więc metodą "paru prób i błędów". Nauczyciel zasłania kartonikiem, na którym jest wypisana cyfra liczby jeden, literę "x" i pyta, czy taka równość jest prawdziwa. Uczniowie rozwiązują: $6 + 1 = 10$. Równość nie jest tu spełniona, gdyż $6 + 1 = 7$. Dobieramy w dalszej kolejności liczby, które zapewnią równość składników i sumy. W początkowym okresie, twierdzą autorzy, wszystkie etapy rozwiązywania równania powinny być interpretowane w kontekście rozpatrywanego zadania tekstowego. Równanie powinno być rozwiązywane za pomocą czynności manualnych. Dopiero po kilku ćwiczeniach przystępujemy do obliczenia niewiadomej za pomocą odejmowania.

Długo można by wymieniać poglądy autorów, przeważnie matematyków, na temat opracowania z dziećmi klasy pierwszej równań algebraicznych. Przytoczone przykłady wskazują już na różne podejścia metodyczne. Wyraźnie wyłania się grupa metodyków, którzy radzą wprowadzic dzieci w tajniki obliczania niewiadomej poprzez zadania z treścią. Z wymienionych autorów tylko H.Siwek wprowadza niewiadomą używając samych liczb, a i te włącza w kontekst pewnej treści. Bardzo ważnym etapem w prowadzeniu tego tematu jest przygotowanie uczniów do zrozumienia sposobu obliczania "x". Dużą uwagę na cykl przygotowań zwracali tacy autorzy jak H. Moroz, J. Hawlicki, M. Cackowska. Autorzy ci radzą szczególnie skrupulatnie opracować dodawanie i odejmowanie oraz związki istniejące między tymi działaniami. U niektórych autorów, np. M. Cackowskiej i J. Hawlickiego zauważamy dużą precyzję metodyczną przy opracowywaniu tego tematu. Z. Semadeni i E. Puchalska zgodnie z postawionym celem, jakim jest pojęcie równości równania z niewiadomą i liczb, które spełniają równość, mniejszą uwagę zwracają na sposób obliczania "x", a główną uwagę dzieci radzą skupić na przyswojeniu i zrozumieniu wymienionych, ważnych pojęć.

4. Wyniki badań efektów dydaktycznych

4.1. Sposoby wprowadzania niewiadomej przez nauczycieli

B. Jankowska i inni w swych pracach podają, iż wśród badanych nauczycieli można wyodrębnić cztery sposoby wprowadzania "x". Pierwszy sposób polega na stosunkowo długim okresie przygotowania dzieci do działań na liczbach. Sytuacją wyjściową jest tu zadanie z treścią zawierające liczbę niewiadomą. Po zapisaniu formuły dzieci przez działania manipulacyjne na krążkach doliczały tak długo, aż otrzymały równość. Przy rozwiązywaniu zadań stosowano też klocki Cuisenaire'a. Obliczenie niewiadomej odbywało się po względnie dobrym opracowaniu związku dodawania i odejmowania z użyciem nazwy suma, składniki.

Drugi sposób miał podobny początek, a więc zadanie z treścią, w którym niewiadoma wyrażona była słowem "kilka". Przy zapisie formuły /równania/ słowo "kilka" zastąpiła koperta ze znakiem zapytania zamieniona na "x". Powstał więc zapis np. x + 3 = 8 /Jankowska/. Rozwiązanie nastąpiło za pomocą grafów, a następnie zastąpiono je zapisem algebraicznym. Przy dodawaniu, w którym niewiadomy był drugi składnik, dzieci zamieniły porządek składników korzystając z poznanego prawa przemienności dodawania.

Trzeci sposób polegał na tworzeniu sytuacji. Do pewnej liczby liczmanów w kopercie nauczycielka dołożyła 3. Po przeliczeniu razem było 9.

Niewiadomą liczbę liczmanów oznaczono znakiem "x". Powstał więc zapis x + 3 = 9. Znalezienie /obliczenie/ niewiadomej odbywało się na zasadzie znajomości składu liczby 9, to jest 3 i 6. Dzieci mówiły - mamy liczbę 3, a więc ta niewiadoma liczba wynosi 6. Część dzieci mogła tu również doliczać od 3 do 9.

Czwarty sposób polegał tylko na doliczaniu, np. ile musimy dodać do 4, aby otrzymać 10 ? Uczniowie rysują 10 kółek, pod nimi 4. Liczbę niewiadomą zapisują znakiem "x".

$$0\;0\;0\;0\;\underbrace{0\;0\;0\;0\;0\;0}_{x}$$
$$0\;0\;0\;0$$

Układają równanie

4 + x = 10

Niektórzy nauczyciele używali też innych liczmanów. Byli też tacy, którzy sytuację ilustrowali na osi liczbowej.

Każdy nauczyciel uczący matematyki w klasie pierwszej stosuje te, wyżej wymienione sposoby przygotowania dzieci i obliczania niewiadomej "x". Trudno jest zebrać wszystkie. Każdy nauczyciel jest przecież odrębną indywidualnością i jego sposób opracowania z dziećmi tematu - niewiadoma "x"-w większym, czy też mniejszym stopniu upodabnia się do wyżej przedstawionych.

4.2. Wyniki nauczania w klasie I w zakresie umiejętności stosowania obliczeń algebraicznych

Efekty dydaktyczne, szczególnie w matematyce, zależą od wielu zmiennych. Stosowana metoda matematyczna jest ważnym, ale na pewno nie jedynym czynnikiem warunkującym uzyskanie pozytywnych wyników w nauczaniu. Nasuwa się więc pytanie, która ze stosowanych metod jest najskuteczniejsza. Przypomnę, iż przy pierwszym sposobie /metodzie/ nauczyciele uwzględnili długi cykl przygotowań do wprowadzenia "x". Wprowadzenie obliczenia "x" rozpoczynano od manipulacji konkretnych, by dojść do obliczeń niewiadomej drogą wnioskowania w oparciu o związki liczb. Drugi sposób polegał na obliczaniu niewiadomej za pomocą grafów z uwzględnieniem znajomości związków między działaniami. W trzecim sposobie nauczyciel korzystał ze znajomości składu liczb, w czwartym dzieci dopełniały do znanej liczby. W dwu pierwszych metodach /sposobach/ punktem wyjścia była treść życiowa, w dwu pozostałych liczba.

Obecnie przedstawię tabelę ilustrującą wyniki nauczania w zakresie umiejętności algebraicznego sposobu obliczania niewiadomej w zależności od stosowanej metody wprowadzania "x" /B. Jankowska/ [11].

Tabela 1. Umiejętność rozwiązywania równań przez uczniów kl. I w zależności od ich wprowadzenia

Lp.	Sposób wprowadzenia "x"	Liczba uczniów	% poprawnych obliczeń
1	I	108	85,1
2	II	116	76,3
3	III	56	64,2
4	IV	112	65,2

Dane tabeli ukazują wartość stosowanych metod wprowadzenia niewiadomej "x". Grupa nauczycieli stosująca pierwszy sposób uzyskała 85,1 % możliwych wyników. Nauczyciele uczący drugim sposobem 76,3 %, trzecim 64,2 %, czwartym 65,2 %. A więc wysoki wskaźnik efektów uzyskali ci nauczyciele, którzy w sposób przemyślany, jednocześnie wszechstronny, urozmaicony przygotowują dzieci do zrozumienia związku między dodawaniem i odejmowaniem. Nauczyciele ci, jak podkreśla autorka pracy, w szerokim zakresie stosowali stopniowanie trudności. Przechodzili od doliczania na konkretach do liczb w kolorach, na których łatwo było ukazać związek dodawania i odejmowania. Takie czynnościowe metody rozwiązywania, podkreśla B. Jankowska, ułatwiły opis słowny wykonywanych obliczeń.

Przy drugim sposobie, w którym nauczyciele stosowali związek dodawania z odejmowaniem w sposób schematyczny i oderwany od manualnych ćwiczeń przygotowujących /doliczanie, monografia, kolorowe klocki/ uczniowie napotykali na szczególne trudności przy rozwiązywaniu zadania typu $11 - x = 4$. Nie umieli takiego zadania zamieniać na równoważne $4 + x = 11$.

Najsłabszy wynik osiągnięto przy trzecim sposobie działania /64,2 %/. Wprowadzenie niewiadomej zbyt werbalnie, bez należytego przygotowania okazuje się dla dzieci mało skuteczne. Dzieci nie radziły tu sobie szczególnie z zadaniami na odejmowanie np. $11 - x = 4$, $x - 6 = 3$.

Również czwarty sposób okazał się dydaktycznie mało efektywny. Manipulowanie liczmanami i wizualne dostrzeganie sytuacji bez odpowiedniej werbalizacji problemów matematycznych okazuje się również niedostateczne przy obliczaniu niewiadomej "x".

Dzieci obliczały tu niewiadomą nie na liczbach i ich werbalnych zastępnikach, ale przy pomocy wytworzonej sytuacji. Porównywały więc nie liczby lecz liczmany.

Sposób opracowania niewiadomej okazał się bardzo istotny w samodzielnym obliczaniu zadań z treścią. Następna tabela zawiera dane na ten właśnie temat.

Tabela 2. Umiejętność stosowania obliczeń algebraicznych w samodzielnym rozwiązywaniu zadań z treścią w zależności od sposobu wprowadzenia niewiadomej

Lp.	Sposób wprowadzenia	Liczba uczniów	Sposób rozwiązywania		Zadanie nie wykonane
			algebraiczny	artmetyczny	
1	I	108	84,6	2,2	13,2
2	II	116	71,9	4,8	13,2
3	III	56	51,3	25,9	22,8
4	IV	112	41,0	43,7	15,3

Z zestawienia wynika, iż nauczyciele pierwszej grupy uzyskali najwyższy wskaźnik poprawnych wyników w algebraicznym sposobie rozwiązywania zadań. Aż 84,6 % prac dzieci wykonały poprawnie . W tej grupie tylko 2,2 % zadań dzieci rozwiązały stosując arytmetyczny sposób działania; błędnych obliczeń było 13,2 %.

Druga grupa nauczycieli uzyskała 71,9 % poprawnych obliczeń algebraicznych, 4,8 % arytmetycznych i 23,2 błędnych. W następnej, trzeciej grupie, analogiczne dane są: 51,3 %, 25,9 % i 22,8, w czwartej 41,0 %, 43,7 i 15,3 %.

Podane wyniki badań przeprowadzonych wśród 392 uczniów klasy pierwszej i 18 nauczycieli naświetlają wiele spraw matematycznych i metodycznych związanych z realizacją treści programu na temat zapisu równania, pojęcia liczby niewiadomej i rozwiązywania zadań sposobem algebraicznym. Badania, a i codzienna praktyka ukazują, iż tematyka algebraiczna w klasie pierwszej należy do najtrudniejszych opracowań metodycznych. Dobre efekty dydaktyczne są tu rezultatem przemyślanej pracy nauczycieli, są jakby zakończeniem opracowania działań w I i w II dziesiątce. Podkreślić należy, iż ta klasa osiągnie dobre wyniki, która poprzednie tematy arytmetyczne opracowała w stopniu bardzo dobrym. Dzieci muszą więc znać pojęcie liczby, jej strukturę, działania, związek dodawania z odejmowaniem, posiadać dostatecznie rozwiniętą wyobraźnię i myślenie matematyczne, by zrozumieć treść zadania, wyobrazić sobie sytuację, ułożyć równanie i bezbłędnie je rozwiązać. Przedstawione wyniki badań dowodzą, iż najistotniejszy wpływ na pozytywne wyniki w realizacji algebraicznych treści ma swobodne operowanie liczbami w dodawaniu i odejmowaniu, jako w działaniach odwrotnych, ale wzajemnie uzupełniających się. Tę rysującą się prawidłowość potwierdzają badania J. Fijołek, która w swych pracach chciała udowodnić tezę, iż dobre opanowanie dodawania i odejmowania oraz zrozumienie związków między tymi działaniami wywiera istotny wpływ na opanowanie algebraicznego sposobu rozwiązywania zadań. Autorka pracy przeprowadziła wśród dzieci klasy pierwszej dwa sprawdziany. Pierwszy dotyczył dodawania i odejmowania oraz związków między tymi działaniami. Na ogólną liczbę 2916 zadań 82,6 % dzieci rozwiązały poprawnie, 17,4 % błędnie. Drugi sprawdzian dotyczył zbadania stopnia opanowania przez dzieci rozwiązywania równań typu $a + x = b$, $x - a = b$ oraz $a - x = b$.

Wyniki sprawdzianu potwierdziły, iż tam, gdzie dzieci dobrze opanowały dodawanie i odejmowanie jako działanie odwrotne i wzajemnie uzupełniające się, również dobra jest umiejętność rozwiązywania równań. Mianowicie, w drugim sprawdzianie 75 % zadań dzieci wykonały poprawnie, 2,5 % błędnie. Na pewne zaniżenie wyników wpłynęły tu niewątpliwie trudniejsze do rozwiązania zadania typu $x - 5$, $8 - x$.

Autorka pracy pisze w podsumowaniu treści tabeli; "Dokładnie ukształtowane związki zachodzące między odejmowaniem jako działaniem odwrotnym do dodawania doprowadziły uczniów do rozwiązywania odpowiednich równań oraz zadań tekstowych za pomocą równań"[12].

J. Fijołek przeprowadziła również ankietę wśród nauczycieli na temat sposobu wprowadzenia z dziećmi klasy pierwszej niewiadomej "x". Nauczyciele przystąpili do rozwiązywania równań, gdy dzieci miały ukształtowane pojęcie liczby, umiały stosować działania odwrotne, znały znaki działań, poprawnie operowały terminami składnik, suma, różnica, znały związki dodawania z odejmowaniem.

Łatwo zauważyć, iż wyniki te są bardzo zbieżne z ustaleniami B. Jankowskiej, odpowiadają teoretycznym ustaleniom na ten temat w pozycjach M. Cackowskiej, J. Hawlickiego i innych.[13] /patrz punkt 3/.

J. Fijołek stwierdza również, iż duży wpływ na stosowanie skutecznej metody pracy z dziećmi wywiera wykształcenie nauczycieli. Z reguły nauczyciele specjalności nauczania początkowego, absolwenci tegoż kierunku studiów wyższych lub aktualnie studiujący, uzyskują tu dużo lepsze wyniki od osób, które nie posiadają kwalifikacji specjalistycznych.

5. Zakończenie

Omawiane badania prowadzone były pod koniec lat siedemdziesiątych. Dużo od tego czasu zmieniło się. Spora liczba nauczycieli ukończyła wyższe studia specjalistyczne, dużo aktualnie dokształca się , najwięcej poddało się pracy przygotowawczej i egzaminowi dającemu uprawnienia równoważne wyższym studiom zawodowym i wreszcie, w 1981/82 r. szkolnym poprawki do programu złagodziły wymagania w zakresie wprowadzenia i opracowania treści algebraicznych w klasie I. Mimo tych zmian wprowadzenie niewiadomej w kl. I należy do najbardziej złożonych tematów. Jest to jakby sprawdzian opracowanych tematów poprzedzających wprowadzenie niewiadomej "x". Dziecko musi bardzo dobrze opanować dodawanie w I i II dziesiątce. Szczególnie starannego potraktowania wymagają działania w I dziesiątce i związki między dodawaniem i odejmowaniem. Ta ostatnia umiejętność winna być zrozumiana i odczytywana z formuły arytmetycznej.

Ogólnie stwierdzić należy, iż nauczanie matematyki ulega ciągłym progresywnym modyfikacjom. Siłą nośną tych przemian są badania teoretyczne, zbyt szczupłe jeszcze w stosunku do potrzeb codziennej praktyki. Poszerzenie naukowych analiz działania metodycznego w nauczaniu matematyki w klasach niższych jest konieczne.

PRZYPISY

[1]Z. Semadeni, O nauczaniu początkowym matematyki, "Życie Szkoły" 1971 nr 5, s.18

[2]S. Turnau, Nauczanie początkowe matematyki w świecie,"Oświata i Wychowanie" 1975, nr 4, s.26

[3]S. Turnau, Tendencje w metodach i środkach stosowanych w nauczaniu matematyki, Matematyka 1974, nr 4, s.227 i nr 5, s.293

[4]H.Moroz, Problemy modernizacji początkowego nauczania matematyki, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego, Zeszyt 18, Warszawa-Kraków 1972

[5]M. Cackowska, Z doświadczeń wprowadzenia algebry do początkowego nauczania matematyki, "Życie Szkoły" 1968, nr 6, s.25-27

[6]J. Galant, J. Hawlicki, Proces dydaktyczno-wychowawczy w klasach I-III, WSiP, Warszawa 1978, s.289

[7]J. Galant i J. Hawlicki, tamże, s. 293

[8]H. Zalewska, Poradnik metodyczny do nauczania matematyki w kl. I szkoły podstawowej, pod red. J. Gorskiej, WSiP, Warszawa 1976, s.39

[9]H. Siwek, Równania, "Oświata i Wychowanie" 1975, nr 12, wkładka Studium Nauczania Początkowego Matematyki, NURT nr 12, s.302

[10]Z. Semadeni, E. Puchalska, Kształtowanie pojęć matematycznych w kl. I, "Oświata i Wychowanie" nr 6, wkładka Studium Nauczania Początkowego nr 14, s.435-448

[11]B. Jankowska, Sposoby wprowadzania równań, WSP, Bydgoszcz 1980, praca magisterska złożona w Zakładzie Nauczania Początkowego.

[12]J. Fijołek, Działalność metodyczna nauczycieli przy wprowadzaniu niewiadomej "x", WSP, Bydgoszcz 1978, praca magisterska złożona w Zakładzie Nauczania Początkowego

[13]K. Kozłowska, Działalność metodyczna nauczycieli przy wprowadzaniu niewiadomej "x", WSP, Bydgoszcz 1978, Praca magisterska złożona w Zakładzie Nauczania Początkowego

METHODICAL PROBLEMS IN APPLICATION OF UNKNOWN QUANTITY

Summary

The author presents the course and results of his studies of application of unknown quantity 'x' in the first form of primary school. Methodical description of the subject is very complet It reg- uires detailed preparation of children for understanding addition, subtraction, various relations among numerals, perception of various dependances among numerals in mathematical formula, proper usage of terminology. Such preparation of children allows then to understand how to solve exercises inluding unknown quantity.