**Adam Mroczkowski**

# Elementarna kultura matematyczna polskich uczniów gimnazjum w kontekście wyników badania PISA

**Streszczenie**

Elementarną kulturą matematyczną nazywamy ogół wiedzy, kompetencji i umiejętności, które powinny stać się udziałem uczniów danego etapu edukacji. W kulturze matematycznej kreuje się, niezbędna dorosłemu człowiekowi w codziennym życiu, umiejętność myślenia matematycznego. Badania PISA pokazują, że chociaż wyniki polskich gimnazjalistów w części matematycznej osiągnęły poziom porównywalny do średniej państw członkowskich OECE, to wciąż jeszcze przed nami wiele pracy, zanim dołączymy do najlepszych.

W niniejszej pracy przeanalizowano wyniki polskich uczniów w badaniach PISA, w kontekście ich elementarnej kultury matematycznej. Zdefiniowano także pojęcia elementarnej kultury matematycznej, myślenia matematycznego i wyprowadzono wnioski.

**Słowa kluczowe**: kultura matematyczna, myślenie matematyczne, badanie PISA

**Summary**

Basic mathematical culture is defined as the whole knowledge, competencies and skills, that a student should ilate/acquire during each level of education. In mathematical culture, an ability for mathematical thinking is created, which is essential in everyday life for everyone. The researches of Program for International Student Assessment (PISA) show, that although results of polish students in mathematical part of exams, reached a level comparable to the average of the OECD countries, there is still a lot of work ahead of us, to join the best.

In this study were analyzed the results of polish students in PISA researches, in the context of their basic mathematical culture. Also defined the concept of basic mathematical culture, mathematical thinking and presented conclusions.

**Keywords**: mathematical culture, mathematical thinking, PISA

## 1. Program badań PISA

Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów (ang. *Programme for International Student Assessment*, PISA) realizowany jest pod auspicjami Organizacji Współpracy Gospodarczej i Rozwoju (OECD). Badanie przeprowadzane jest regularnie co trzy lata, począwszy od 2000 roku. Jego celem jest monitorowanie efektywności działań edukacyjnych w porównaniu międzynarodowym. Badaną grupą są uczniowie w wieku 15 lat, ponieważ w prawie wszystkich państwach należących do OECD uczęszczają oni jeszcze do szkoły. Jednocześnie ich edukacja trwa już wystarczająco długo, aby móc realnie ocenić jej efektywność.

Badanie PISA, jak mało które badanie społeczne, wywołało publiczną sensację [Spitzer, 2008] i na stałe zadomowiło się w świadomości społecznej, jako punkt odniesienia dla podejmowanych w oświacie działań [Federowicz i in., 2008]. Nie powinno ono być jednak, co słusznie zauważają jego autorzy, swoistą „Olimpiadą w zakresie poziomu kształcenia, w czasie której wyłania się zwycięzców i przegranych" [Spitzer, 2008]. Program badań stwarza realną szansę porównania efektywności systemów edukacyjnych w różnych krajach. Dzięki temu w założeniu będzie możliwe nawet swoiste „uczenie się" całych systemów od siebie, poprzez porównanie z osiągającymi lepsze i gorsze wyniki.

Punktem wyjścia dla badania PISA jest pojęcie „alfabetyzmu" (ang. *literacy*) odnoszące się do „zdolności stosowania wiedzy i umiejętności, analizowania, argumentowania i efektywnego komunikowania w procesie stawiania, rozwiązywania i interpretowania problemów w różnych sytuacjach" [PISA, 2003]. Badanie zostało podzielone na trzy obszary tematyczne:

1) czytanie ze zrozumieniem (*reading literacy*),
2) rozumowanie w naukach przyrodniczych (*scientific literacy*),
3) matematyka (*mathematical literacy*).

Specyfika ostatniego z wymienionych obszarów zostanie przedstawiona szczegółowo w kolejnym paragrafie.

## 2. Rozumienie matematyki w badaniu PISA

Matematyka była główną domeną badania PISA w 2003 roku. Skalibrowano wtedy skalę punktową dla kolejnych edycji i przyjęto, że średni wynik państw członkowskich OECD wynosi 500 punktów. Do zbadania umiejętności uczniów wykorzystano wówczas 84 zadania, z których 48 użyto ponownie w edycji z 2006 roku, a kolejne 35 zadań w 2009 roku. Warto poświęcić odrobinę czasu, aby dobrze zrozumieć, jak postrzegana jest matematyka przez twórców badania. Punktem wyjścia jest przekonanie, że rozwój nauki i techniki od każdego człowieka wymaga coraz lepszego korzystania z matematyki w najróżniejszych sytuacjach życia codziennego. „Podobnie jak dawniej, tak i teraz zakłada się, że istnieje transfer umiejętności zdobytych w szkole na zadaniach realistycznych do działalności zawodowej w dorosłym życiu" [Siwek, 2005]. PISA próbuje odpowiedzieć więc na pytanie: „w jakim stopniu piętnastoletni uczniowie są w stanie uaktywnić swoją wiedzę i umiejętności matematyczne, gdy stają przed koniecznością rozwiązania autentycznych problemów, jakich dostarcza im otaczający świat?" [Bartnik i in., 2006]. Takie założenie sprawia, że zadania są umieszczane w kontekście praktycznym i na ogół nie przypominają rutynowych przykładów szkolnych [Haman, 2009]. Trudność polega zatem nie na rozwiązaniu oderwanej od życia abstrakcyjnej łamigłówki obliczeniowej, ale poradzeniu sobie z realnym problemem bez znajomości gotowego schematu postępowania. Wykorzystuje się w tym celu **myślenie matematyczne**, które jest kluczowe dla zrozumienia powyższej idei. „Specyfika myślenia matematycznego polega na myśleniu konkretnym, opartym na określonych założeniach, prawach logicznych, definicjach, twierdzeniach, a jednocześnie na stawianiu pytań-hipotez, choć nie zawsze można na nie odpowiedzieć" [Nowik, 2011].

Według autorów badania PISA:

Myślenie matematyczne oznacza indywidualną zdolność do:

- rozpoznania i zrozumienia roli matematyki we współczesnym świecie,
- formułowania osądów opartych na logicznym, matematycznym rozumowaniu,
- wykorzystywania umiejętności matematycznych, jeżeli wymaga tego sytuacja życia codziennego [Haman, 2009].

Szerszą i bogatszą definicję podaje M. Niss, który wymienia myślenie matematyczne jako jedną z ośmiu umiejętności wchodzących w skład kompetencji matematycznych[1]. Jego zdaniem [Niss, 2003, tłumaczenie M. Legutko i S. Turnau] na myślenie matematyczne składają się takie umiejętności, jak:

- stawianie charakterystycznych dla matematyki pytań oraz wiedza, jakiego rodzaju odpowiedzi można oczekiwać;
- rozszerzanie zakresu pojęcia poprzez uabstrakcyjnianie niektórych jego własności i uogólnianie wyników dla szerszych klas przedmiotów;
- odróżnianie różnych rodzajów zdań matematycznych (włącznie z wypowiedziami implikacyjnymi „jeśli-to"), zdaniami z kwantyfikatorami, założeniami, definicjami, twierdzeniami, przypuszczeniami, hipotezami i szczególnymi przypadkami;
- operowanie danym pojęciem przy rozumieniu jego zakresu i jego ograniczeń.

Autorzy książki *Matematyczne myślenie*, J. Mason, K. Stacey i L. Burton, wymieniają trzy czynniki, mające zasadniczy wpływ na skuteczność myślenia matematycznego [Mason i in., 2005]:

1. umiejętność wykorzystywania procesów używanych w badaniach matematycznych,
2. panowanie nad stanami psychicznymi i emocjonalnymi oraz zdolność ich wykorzystania,
3. rozumienie odpowiedniej dziedziny matematyki, a jeśli to konieczne, również dziedziny, w której jest stosowana.

Każde wykorzystane w badaniu PISA zadanie zostało opisane za pomocą trzech parametrów. Pierwszy z nich to **treści matematyczne**, do których trzeba się odwołać, rozwiązując dany problem [Bartnik i in., 2006]:

- przestrzeń i kształt – sytuacje geometryczne, związki przestrzenne między obiektami;
- zmiana i związki – zależności funkcyjne oraz ogólniejsze relacje, reprezentowane w sposób symboliczny, algebraiczny, tabelaryczny lub graficzny;
- ilość – obliczenia, w tym zrozumienie sensu wykonywanych obliczeń, szacowanie i przybliżanie wielkości liczbowych, odwołanie do realnych liczb otaczającego świata (np. kursy walut, objętości, gęstości);
- niepewność – zjawiska losowe, rozważania o charakterze statystycznym i probabilistycznym.

[1] Kompetencje matematyczne znalazły się wśród ośmiu kompetencji kluczowych dla uczenia się przez całe życie w zaleceniu Parlamentu Europejskiego z dnia 26 września 2006 roku.

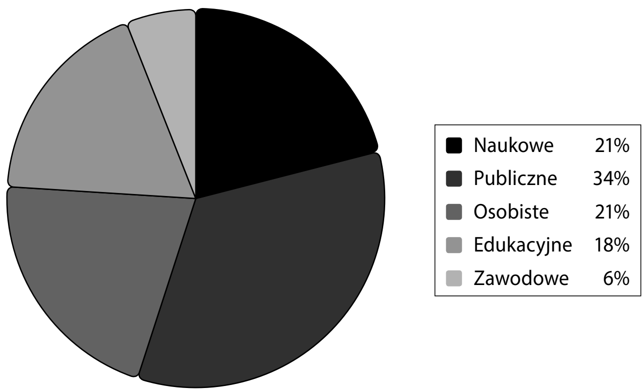
Kolejny parametr to **umiejętności matematyczne**, które należy uaktywnić, by skojarzyć postawiony problem z matematyką i znaleźć rozwiązanie [Bartnik i in., 2006]:

- odtwarzanie – kompetencje wykorzystywane w zadaniach wymagających użycia wyćwiczonych umiejętności oraz operowania dobrze znanymi, prostymi obiektami;
- powiązania – występuje zwykle większa liczba kroków do wykonania. Uczeń musi wybrać pojęcia matematyczne odpowiednie dla rozwiązania danego problemu;
- rozumowanie – oznacza twórcze podejście do problemu, niebanalną matematyzację lub rozumowanie, stworzenie modelu często polegające na uogólnieniu, zazwyczaj wymagane jest wyjaśnienie lub uzasadnienie rozwiązania.

Ostatnim parametr to **sytuacja**, w jakiej umieszczony jest postawiony problem [Bartnik i in., 2006]:

- osobista – związana z życiem codziennym,
- edukacyjna – napotykana zazwyczaj w szkole,
- zawodowa – związana z pracą,
- publiczna – związana z życiem społeczności lokalnej (np. komunikacja) oraz rozumianej szerzej (np. wybory parlamentarne),
- naukowa – konteksty techniczne, fizyczne, sytuacje wymagające użycia matematyki do opisu zjawiska.

W roku 2003 sytuacje wykorzystano w następujących proporcjach:




Wykres 1. Sytuacje występujące w zadaniach w badaniu z roku 2003
Źródło: Federowicz (red.) [2008]

Skala osiągnięć matematycznych została podzielona na sześć poziomów. Tabela zawiera opis umiejętności, charakterystycznych dla każdego z nich.

Analizę osiągnięć polskich gimnazjalistów w badaniu PISA warto poprzedzić stwierdzeniem, że jego autorzy kładą szczególny nacisk na kreatywny, analityczny sposób myślenia oraz aplikacyjny charakter wiedzy matematycznej uczniów. Rozwiązując zadanie, trzeba zmierzyć się z problemem, do którego nie mamy gotowego, wyuczonego schematu postępowania. Przy takim podejściu autorów, badania różnice pomiędzy programami nauczania w poszczególnych szkołach nie mają żadnego znaczenia.

Tabela 1. Umiejętności typowe dla każdego poziomu osiągnięć matematycznych

| Poziom | Umiejętności typowe dla każdego poziomu |
|---|---|
| Poziom 6 (>669 pkt) | Uczeń potrafi analizować i uogólniać informacje zgromadzone w wyniku zbadania samodzielnie zbudowanego modelu złożonej sytuacji problemowej. Umie połączyć informacje pochodzące z różnych źródeł i swobodnie przemieszczać się między nimi. Potrafi wykonywać zaawansowane rozumowania i wnioskować matematycznie. Umie połączyć rozumowanie z biegłością w wykonywaniu operacji symbolicznych i formalnych podczas twórczej pracy nad nowym dla siebie kontekstem. Potrafi precyzyjnie formułować komunikat o swoim rozumowaniu, uzasadniając podjęte działania. |
| Poziom 5 (607-669 pkt) | Uczeń umie modelować złożone sytuacje, identyfikując ograniczenia i precyzując zastrzeżenia. Potrafi porównywać, oceniać i wybierać odpowiednie strategie dla problemów związanych ze zbudowanym modelem. Wykorzystuje dobrze rozwinięte umiejętności matematyczne z użyciem odpowiednich reprezentacji, w tym symbolicznych i formalnych. Potrafi krytycznie ocenić swoje działania oraz zakomunikować swoją interpretację i sposób rozumowania. |
| Poziom 4 (545-606 pkt) | Uczeń umie efektywnie pracować z podanymi wprost modelami złożonych sytuacji realnych, identyfikując ograniczenia i czyniąc niezbędne założenia. Potrafi wybierać oraz łączyć informacje pochodzące z różnych źródeł, wiążąc je bezpośrednio z kontekstem realnym. Umie w takich kontekstach stosować ze zrozumieniem dobrze wyuczone techniki. Potrafi konstruować komunikaty opisujące swoje interpretacje, argumenty i działania. |
| Poziom 3 (482-544 pkt) | Uczeń umie wykonać jasno opisany algorytm, także wymagający sekwencyjnego podejmowania decyzji. Potrafi wybierać i stosować proste strategie rozwiązywania problemów. Potrafi interpretować i wyciągać bezpośrednie wnioski z danych pochodzących z kilku źródeł. Umie przedstawić wyniki nieskomplikowanych interpretacji i rozważań. |
| Poziom 2 (420-482 pkt) | Uczeń umie rozpoznać i zinterpretować sytuację wymagającą tylko prostego kojarzenia. Potrafi wydobyć istotną informację z pojedynczego źródła i użyć na raz jednej formy reprezentacji danych. Umie zastosować prosty wzór lub przepis postępowania. Potrafi wyciągnąć bezpośrednie wnioski i dosłownie zinterpretować wyniki. |
| Poziom 1 (358-420 pkt) | Uczeń umie rozwiązywać typowe zadania, w których wszystkie dane są bezpośrednio podane, a zadane pytania są proste. Potrafi wykonywać czynności rutynowe, postępując zgodnie z podanym prostym przepisem. Podejmuje działania oczywiste, wynikające wprost z treści zadania. |
| < Poz. 1 (<358 pkt) | Uczeń wykazuje brak umiejętności nawet na poziomie 1. |

Źródło: PISA

# 3. Wyniki i problemy polskich uczniów w badaniu PISA

Porównanie wyników Polski i innych krajów OECD w poszczególnych edycjach badania dostarcza wielu informacji na temat skuteczności edukacji matematycznej i czynników, które ją warunkują. Trudny do zaakceptowania może być fakt, że nie na wszystko mamy wpływ i niektórych elementów, jak np. pozytywnego wpływu historii i kultury danego regionu, nie jesteśmy w stanie przenieść na nasz grunt.

## 3.1. Wyniki badania PISA na świecie

Najwyższe wyniki w badaniach PISA osiągają systematycznie kraje azjatyckie. W 2003 roku najwięcej punktów uzyskali uczniowie z Hongkongu. Trzy lata później palmę pierwszeństwa przejął Tajwan, aby w ostatniej jak do tej pory edycji ustąpić miejsca Szanghajowi, który w 2009 roku pierwszy raz przystąpił samodzielnie do badania. Europę w czołówce zestawienia nieprzerwanie reprezentuje Finlandia.

Tab. 2. Najwyższe wyniki w badaniu PISA w poszczególnych edycjach

| Badania PISA 2003 – matematyka | |
|---|---|
| 1 | Hongkong (Chiny) |
| 2 | Finlandia |
| 3 | Korea |
| 4 | Holandia |
| 5 | Lichtenstein |
| 6 | Japonia |
| 7 | Kanada |
| 8 | Belgia |
| 9 | Szwajcaria |
| 10 | Australia |

| Badania PISA 2006 – matematyka | |
|---|---|
| 1 | Tajwan |
| 2 | Finlandia |
| 3 | Hongkong (Chiny) |
| 4 | Korea |
| 5 | Holandia |
| 6 | Szwajcaria |
| 7 | Kanada |
| 8 | Macao (Chiny) |
| 9 | Lichtenstein |
| 10 | Japonia |

| Badania PISA 2009 – matematyka | |
|---|---|
| 1 | Szanghaj (Chiny) |
| 2 | Singapur |
| 3 | Hongkong (Chiny) |
| 4 | Korea |
| 5 | Tajwan |
| 6 | Finlandia |
| 7 | Lichtenstein |
| 8 | Szwajcaria |
| 9 | Japonia |
| 10 | Kanada |

Źródło: PISA

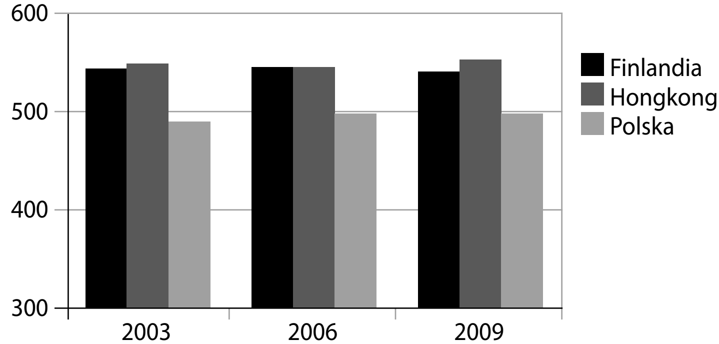
Za sukcesami poszczególnych państw w badaniu PISA stoją różne czynniki, które trudno skonkretyzować. Dużą rolę mogą jednak pełnić uwarunkowania historyczne i kulturowe. W przypadku uczniów z Azji źródła znakomitych wyników często upatruje się w ich szczególnej pracowitości, uporze i konsekwencji. R. Nisbett w książce *Inteligencja. Sposoby oddziaływania na IQ* przekonuje, że wspomniane cechy mają swoje źródło już w naukach Konfucjusza sprzed dwóch i pół tysiąca lat. Filozof ten twierdził, że istnieją „dwa źródła zdolności: jedno pochodzące z natury – dar niebios – i drugie wynikające z ciężkiej pracy” [Nisbett, 2010]. Azjaci do dziś są przekonani, że osiągnięcia matematyczne (lub szerzej: intelektualne) są wynikiem głównie podjętego wysiłku. Zupełnie inne podejście cechuje np. Amerykanów, którzy bardziej skłonni są uważać, że jest to kwestia wrodzonych zdolności lub posiadania dobrego nauczyciela [Nisbett, 2010]. Taki pogląd jest też popularny w kulturze masowej krajów zachodnich. Niech za przykład posłuży popularny, nagrodzony Oskarami film *Buntownik z wyboru*. Jego niewykształcony bohater okazuje się matematycznym geniuszem i zawstydza rzeszę studentów, borykających się z bardzo trudnym zadaniem matematycznym. Nieprawdziwości tych przekonań dowodzi, na drodze eksperymentu intelektualnego, B. Butterworth w znakomitej książce *What Counts: How Every Brain is Hardwired for Math*. Udowodniono to także na gruncie neuronautyki (m.in. M. Diamond, A. Scheibel, G. Murphy, T. Harvey [1985], *On the brain of a scientist: Albert Einstein*. W: Experimental Neurology Nr 88).

Zapewne inne są źródła sukcesu Finlandii, gdzie postawiono na edukację nauczycieli i wspieranie od samego początku uczniów słabych. Trudności edukacyjne są wcześnie diagnozowane i poszukuje się dla nich odpowiedniej pomocy. Co więcej, „wyniki PISA wyraźnie pokazują, że wspieranie słabych uczniów nie musi się odbywać kosztem wspierania uczniów dobrych, jak się często uważa” [Spitzer, 2008]. W Finlandii efekty przyniosło także dalsze kształcenie i rozwijanie nauczycieli. „W ramach krajowej oceny stwierdzono, że nauczyciele, którzy mają możliwość dokształcania się przez cztery do sześciu tygodni rocznie, osiągają w szkołach lepsze efekty” [Spitzer, 2008].

Z pewnością nie da się konkretnie i jednoznacznie wypunktować przyczyn sukcesów Finlandii lub krajów azjatyckich, podobnie jak niepowodzeń innych. Można zaryzykować stwierdzenie, że decydującą rolę odgrywa tu raczej splot czynników, uwarunkowanych kulturowo, historycznie i socjologicznie oraz rozmaite decyzje organizacyjne dotyczące oświaty.

## 3.2. Polska na tle innych państw członkowskich OECD

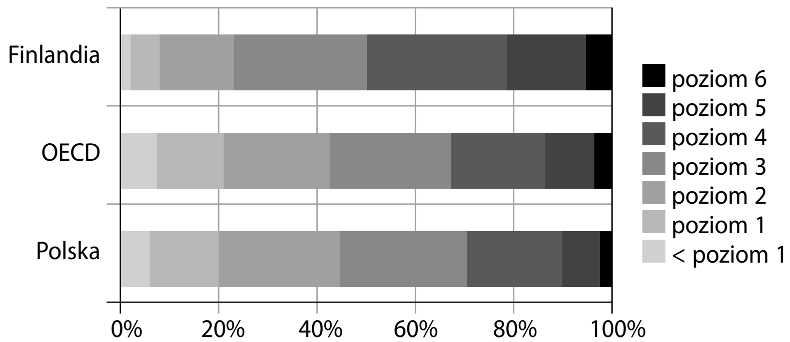
Przypomnijmy, że skala dla wyników z części matematycznej badania została skalibrowana w 2003 roku, gdy rozumowanie matematyczne było główną domeną badania. Przyjęto wtedy, że średni wynik państw członkowskich OECD wynosi 500 punktów. W kolejnej edycji średnia została obniżona do 496 punktów. Od 2003 roku wyniki polskich uczniów zbliżają się do średniej dla krajów OECD i wynoszą w kolejnych edycjach badania: 490 punktów (2003 rok), 495 (2006) i ponownie 495 (2009). Chociaż od wspomnianej średniej jest to wciąż wynik niższy, to w praktyce jest od niej „statystycznie nieodróżnialny” [Haman, 2009]. Według metodologii badań PISA Polska wciąż znajduje się w grupie przeciętnych krajów OECD (w kontekście części matematycznej).




Wykres 2. Wyniki Hongkongu, Finlandii i Polski w kolejnych edycjach badania PISA

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych PISA

W nawiązaniu do zawartych w pierwszej tabeli charakterystyk umiejętności typowych dla poszczególnych poziomów osiągnięć matematycznych, możemy przeanalizować, jak wygląda rozkład procentowy wyników polskich uczniów na tle średniej państw OECD oraz Finlandii (na podstawie edycji badania 2009).

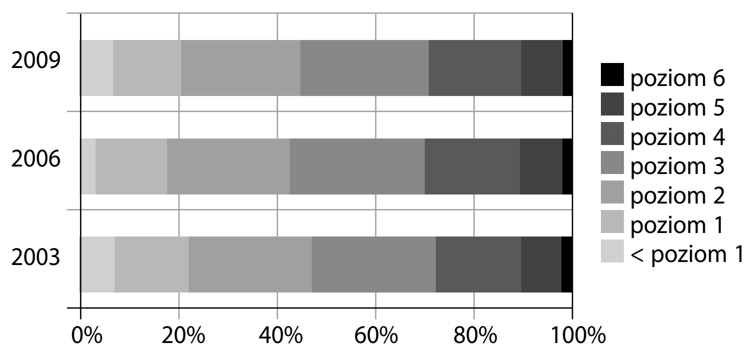



Wykres 3. Porównanie wyników średniej OECD, Finlandii i Polski z rozbiciem na poziomy

Źródło: PISA

W porównaniu z państwami OECD Polska ma więcej uczniów na poziomie średnim, ale mniej na skrajnych – najwyższym i najniższym. Mniej jest więc w naszym kraju zarówno uczniów słabszych niż średnio w państwach OECD, ale również mniej dobrych i bardzo dobrych [Haman, 2009]. Dużo lepszy wynik od średniej OECD zdobyła Finlandia, która nie tylko ma ponad dwa razy więcej uczniów na dwóch najwyższych poziomach, ale w dodatku margines stanowią uczniowie na poziomie najniższym.

Analizując wyniki Polski pod kątem liczby uczniów na poszczególnych poziomach osiągnięć matematycznych, można zauważyć, że w trzech kolejnych edycjach badania nie nastąpiły istotne zmiany.




Wykres 4. Rozkład procentowy wyników Polski z rozbiciem na poziomy w poszczególnych edycjach badania

Źródło: PISA

Warto wspomnieć, że w Polsce nie występuje silne zróżnicowanie wyników uzyskiwanych przez dziewczęta i przez chłopców. W 2009 roku chłopcy osiągnęli wynik 497 punktów, a dziewczęta 493 punkty. Różnica czterech punktów jest znacznie mniejsza niż w przypadku średniej dla krajów członkowskich OECD, która wynosi aż 12 punktów [Haman, 2009].

## 3.3. Charakterystyka osiągnięć polskich uczniów

Osiągnięcia polskich uczniów warto pokazać za pośrednictwem wyników zadań przynależących do poszczególnych poziomów, a także przez ich porównanie ze średnią państw członkowskich OECD i Finlandią, osiągającą regularnie najlepsze wyniki w Europie. Tak uczyniono w raportach z badań PISA i tak też, bazując na na nich, zostanie to przedstawione na kartach niniejszej pracy.

Po pierwsze, zadanie **poniżej najniższego pierwszego poziomu**. Przykład rutynowy, którego rozwiązanie sprowadza się do dodania paru liczb z tabeli. Zadanie było dla polskich uczniów łatwe. Polska jest w nim prawie tak samo dobra jak Finlandia, różnicę stanowią tylko uczniowie najsłabsi, w której to grupie uwidacznia się przewaga Kraju Wielkich Jezior. Wyniki krajów OECD są w tym przypadku słabsze.

W wybranym zadaniu na **poziomie pierwszym** uczniowie musieli ocenić prawdopodobieństwo wystąpienia pewnych elementarnych zdarzeń losowych. Także ten przykład był dla polskich uczniów stosunkowo łatwy. Osiągnięty rezultat jest podobny do rezultatów w krajach OECD, natomiast uczniowie z Finlandii okazali się lepsi.

Treść zadania na **poziomie drugim** zawiera opis pewnej realnej sytuacji do rezultatów wraz z danymi liczbowymi. Od ucznia oczekuje się przeanalizowania opisu i zapisania wniosku. W pierwszej edycji badania (2003 rok) polscy uczniowie radzili sobie z tym zadaniem zdecydowanie gorzej niż w kolejnych edycjach. Wciąż jednak dla wielu najsłabszych uczniów jest to zadanie trudne – w latach 2006 i 2009 poradziło sobie z nim tylko 25% z tych uczniów (co jednak ciekawe, najsłabsi uczniowie z Polski i tak radzą sobie z tym zadaniem lepiej niż średnio uczniowie z krajów OECD). Warto zaznaczyć, że dla najlepszych uczniów zadanie to nie stanowi większego problemu (90% spośród nich rozwiązuje je poprawnie).

Na **poziomie trzecim** wprowadzono do rozwiązania zadanie z zakresu geometrii, które w zależności od preferencji, uczeń mógł wykonać algebraicznie albo czysto geometrycznie. W 2003 roku Polacy poradzili sobie z zadaniem słabo. Porównywalny wynik uzyskaliśmy w latach 2006 i 2009. Finowie radzą sobie z tym zadaniem tak jak nasi uczniowie. Średnia dla krajów OECD jest tym razem wyraźnie słabsza na każdym poziomie osiągnięć.

Zadanie z **poziomu czwartego** polegało na przeanalizowaniu podanego algorytmu i wyciągnięciu wniosków na temat jego użyteczności. Dla polskich uczniów zadanie było trudne. Najsłabsi uczniowie zanotowali rozwiązywalność poniżej 20%, najlepsi z kolei tylko ok. 65%. Zarówno średnia krajów członkowskich OECD, jak i wyniki Finów są w tym zadaniu dużo wyższe niż Polaków.

W zadaniu z **poziomu piątego** konieczne było obliczenie pola nietypowej figury. W edycjach badania z lat 2003 i 2009 polscy uczniowie osiągnęli zbliżony rezultat, natomiast w roku 2006 był on znacząco słabszy. Jest to zadanie trudne dla ok. połowy uczniów. Wśród słabych odsetek poprawnych odpowiedzi jest niższy niż 10%. Zadanie jest jednak trudne nie tylko dla Polaków. Słabe są także średnie wyniki krajów OECD. Fińscy uczniowie radzą sobie jednak z zadaniem dobrze.

Na ostatnim, najwyższym **szóstym poziomie** uczeń musiał opisać wzorem realną sytuację. Wyniki osiągane przez polskich uczniów nie zmieniały się w kolejnych edycjach badania. Rozwiązywalność zadania dla zdecydowanej większości jest równa lub bliska zeru. Dopiero najlepsi przekraczają 10%. Z tym trudnym zadaniem polscy uczniowie radzą sobie znacznie gorzej niż Finowie, a także słabiej niż średnio uczniowie z krajów członkowskich OECD.

Wśród zadań, z którymi zmagali się uczniowie w ramach kolejnych edycji badania PISA, można wyodrębnić dwie grupy:

1) zadania rutynowe, wymagające posłużenia się znanym algorytmem,
2) zadania wymagające przeprowadzenia rozumowania wykraczającego poza znane, szkolne informacje.

Z przykładami z pierwszej grupy Polacy radzą sobie podobnie lub lepiej niż średnio kraje członkowskie OECD. Nasi uczniowie dobrze opanowali sztukę postępowania zgodnie ze znanym algorytmem. Radzą sobie także z odczytywaniem danych zaprezentowanych w sposób graficzny (diagramy, wykresy, tabele).

Zadania z drugiej grupy, wymagające bardziej abstrakcyjnego myślenia, sprawiają jednak naszym uczniom spory kłopot: wyniki w poszczególnych edycjach są co najwyżej porównywalne ze średnią OECD, a w przypadku zadań najtrudniejszych – słabsze. Nasi uczniowie mają problem z podaniem kompletnego rozwiązania oraz przeprowadzenia samodzielnie całego toku rozumowania (od postawienia hipotez, przez zaprojektowanie rozwiązania, skończywszy na sformułowaniu wyniku i wyprowadzeniu wniosków).

## 4. Elementarna kultura matematyczna polskich uczniów

W drugim paragrafie zostało zdefiniowane pojęcie myślenia matematycznego, na badanie którego nastawiona jest matematyczna część programu PISA. Spróbujemy poznać teraz źródło myślenia matematycznego – szkolną elementarną **kulturę matematyczną** – a także zidentyfikować przyczyny problemów polskich uczniów, które uwypukliło badanie OECD.

Pojęcie elementarnej kultury matematycznej przeniosła na grunt polskiej literatury naukowej Zofia Krygowska, opisując w swoim artykule tendencje w nauczaniu matematyki, z jakimi spotkała się na konferencjach międzynarodowych. Termin ten został skonkretyzowany przez Wandę Nowak, która zestawiła w tabeli najważniejsze składowe elementarnej kultury matematycznej.

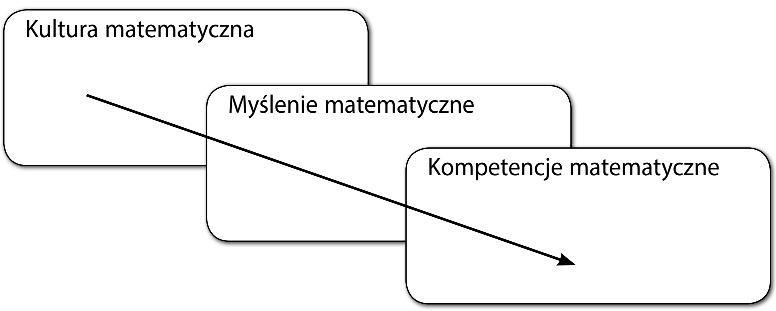
Przygotowaną tabelę autorka opatrzyła komentarzem: „ten rejestr mógłby stanowić punkt wyjścia dla szczegółowego opisania elementów oczekiwanej od ucznia kultury matematycznej na poszczególnych etapach kształcenia" [Nowak, 1989]. Warto zwrócić uwagę, że kultura matematyczna jest pojęciem niezwykle szerokim. Nie oznacza ona wyłącznie wiedzy i umiejętności czysto rachunkowych. Obejmuje także takie aspekty, jak umiejętność posługiwania się językiem matematyki oraz kwestię fundamentalną dla rozwoju myślenia matematycznego, tj. poprawną technikę uczenia się matematyki.

Wyniki badania PISA pokazują, że solidne matematyczne rzemiosło polskich uczniów łączy się z nieporadnością w radzeniu sobie z problemami wymagającymi matematycznej kreacji i bardziej abstrakcyjnego myślenia. Typowa dla polskich uczniów

Tab. 3. Najważniejsze elementy składowe kultury matematycznej

| Dziedzina | Charakterystyka dziedziny |
|---|---|
| Wiadomości i sprawności | Wiadomości wybrane racjonalnie i oszczędnie; wiadomości zorganizowane za pomocą struktur matematycznych; niezbędne sprawności w swobodnym posługiwaniu się wiadomościami. |
| Rozumienie formalnego charakteru matematyki | Rozumienie matematyki jako nauki o wieloznacznych schematach; rozumienie roli matematyki w stosunku do innych dziedzin. |
| Podstawy metodologiczne | Rozumienie prostych pojęć metodologicznych (definicja, twierdzenie, warunek, dowód itp.) |
| Doświadczenie w matematycznym działaniu | Przeżycie typowych procesów matematycznej aktywności: uogólnianie i specyfikacja (pojęcia czy twierdzenia); klasyfikowanie, schematyzowanie i matematyzowanie, abstrahowanie struktur i odkrywanie znanych struktur w ich modelach; dedukowanie; racjonalne organizowanie danych problemu; redukowanie jednych problemów do innych: asymilowanie i przetwarzanie informacji; kodowanie i posługiwanie się symboliką; posługiwanie się graficznymi schematami; posługiwanie się rzeczywistymi i wymyślonymi modelami. |
| Język matematyczny | Poprawne używanie języka matematycznego: definiowanie w określonym języku pojęć użytych intuicyjnie; formułowanie pytań, problemów i twierdzeń; jasne przedstawianie ogniw rozumowania; przedstawienie własnych intuicji i myśli w określonym z góry języku formalnym. |
| Technika uczenia się matematyki | Umiejętne czytanie tekstu matematycznego; „odformalizowanie" i „deformalizowanie" tekstu; umiejętna samokontrola rezultatów własnej pracy; dociekanie źródeł powstawania nieprawidłowych wyników i samokontrola błędów; ostrożne uogólnianie wyników; krytyczna ocena rezultatów własnej pracy. |

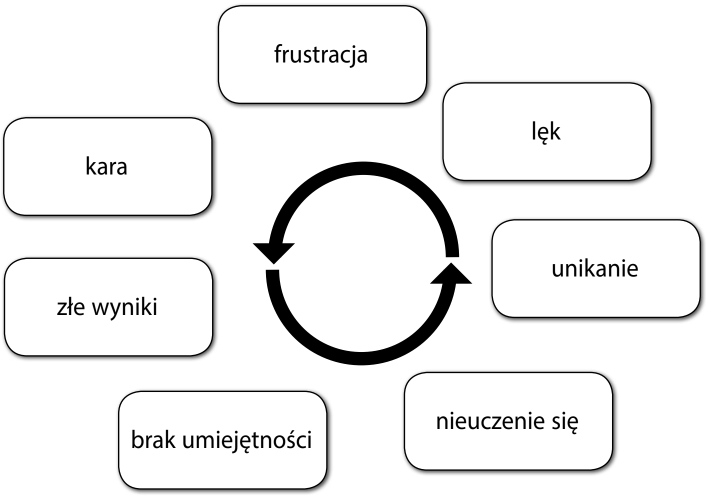
Źródło: Nowak, 1989




Schemat 1. Od kultury matematycznej do kompetencji matematycznych

Źródło: opracowanie własne

strategia uczenia się matematyki „na pamięć", nazywana popularnie 3Z (od „zakuj, zdaj i zapomnij"), nie sprawdza się, gdy konieczne jest rozumowanie w celu rozwiązania nieszablonowego problemu. Co więcej, stosowanie tej zasady może przyczynić się do wpadnięcia w tzw. błędne koło w nauczaniu matematyki, ponieważ niewłaściwie przyswojona kiedyś wiedza, w dodatku już zapomniana, może okazać się niezbędna w kolejnym etapie realizowania programu nauczania [Butterworth, 1999]. Słabe wyniki w nauce, mające źródło w niewłaściwej strategii uczenia się, mogą przerodzić się we frustrację, która z kolei spowoduje lęk przed matematyką i w konsekwencji chęć unikania jej. Unikanie prowadzi do nieuczenia się lub uczenia się na siłę, na pamięć. Wyrwanie się z błędnego koła nauczania musi nastąpić przez „pracę u podstaw", którą w matematyce jest odpowiedni sposób uczenia się.




Schemat 2. Błędne koło w nauczaniu matematyki

Źródło: Butterworth, 1999

Należy jednak pamiętać, że zniechęcenie pojawia się podczas aktywności matematycznej często i nie musi oznaczać poważnych kłopotów. „Pokonywanie trudności jest wpisane w proces uczenia się matematyki. Problem jednak w tym, że dostrzeżenie trudności zawartej w zadaniu wywołuje zawsze wzrost napięcia i emocji ujemnych" [Gruszczyk-Kolczyńska, 1989].

## 5. Właściwe pytania i refleksja

W nawiązaniu do analizy wyników badania PISA oraz powyższych przemyśleń, można stwierdzić, że u podstaw problemów związanych z matematyką u polskich uczniów leżą trudności z:

- analizą problemów matematycznych,
- refleksyjnym podejściem do podejmowanych działań.

Są to dwa bardzo istotne uchybienia w kulturze matematycznej polskich uczniów.

Poprawna analiza treści zadań matematycznych oraz jej znaczenie dla efektów nauczania i uczenia się matematyki jest w literaturze dobrze opisana. Ciężko oczekiwać, żeby niezrozumienie treści zadania, struktury rozwiązywanego problemu i wykonanie go „mechanicznie" zaowocowało rozwojem myślenia matematycznego. Znakomity matematyk i dydaktyk G. Polya twierdził, że „niemądrze jest odpowiadać na pytanie, którego nie zrozumieliśmy" [Polya, 2009]. Aby w pełni przeanalizować problem, z którym się mierzymy, należy zadać właściwe **pytania**. Tymczasem „polscy uczniowie oczekują odpowiedzi, a nie stawiają pytań. Nasi nauczyciele nie pozwalają uczniom na mylenie się i stawianie nawet głupich pytań" [G. Czetweryńska, wypowiedź dla „Gazety Wyborczej" z dnia 11.12.2007]. Wybitny matematyk A. Grothendieck, opisując swój styl pracy, również podkreślał rolę pytań – „kiedy coś mnie zadziwi w dziedzinie matematyki lub jakiejkolwiek innej, zaczynam stawiać pytania" [Grothendieck, 1985].

W nauczaniu i uczeniu się matematyki pytania są równie ważne jak odpowiedzi. Pomijanie tego etapu często wiąże się z poważnymi problemami właśnie z analizą zadań, co w konsekwencji prowadzi do nieporadności uczniów w sytauacji problemowej, wymagającej analitycznego myślenia oraz do rozwiązywania zadań mechanicznie, bezrefleksyjnie. Tymczasem niezwykle ważna w nauczania matematyki jest również **refleksja** i namysł nad działaniem. Jak stwierdzają J. Mason, K. Stacey i L. Burton w znakomitej książce *Matematyczne myślenie*, wbrew utartemu powiedzeniu wcale nie uczymy się na podstawie doświadczenia – warunkiem koniecznym jest refleksja nad tym, co zrobiliśmy" [Mason i in., 2005]. W celu rozwinięcia myślenia matematycznego, wspomniani autorzy postulują stosowanie metody, którą zawierają w słowach „praktyka połączona z refleksją".

Analizując wyniki badań PISA, można się zastanawiać, na ile polscy uczniowie rozumieją to, co mechanicznie potrafią wyliczyć lub wręcz odtworzyć z pamięci? „Badania wskazują, że wielokrotne powtarzanie czynności prowadzi do jej automatycznego wykonywania, co utrudnia jej myślowe ujęcie. Im wcześniej jakaś czynność jest zautomatyzowana, tym mniejszy udział świadomości" [Nowik, 2011]. Czy uczniowie dostrzegają więc sens podejmowanych takich, a nie innych działań? Czy znają inne sposoby poradzenia sobie z problemem, o ile takie istnieją? Jeżeli tak, to jakie kryteria zadecydowały o wyborze metody działania? Jaki jest szerszy kontekst wykonywanych obliczeń? Przemyślenie odpowiedzi na te pytania jest warunkiem koniecznym, aby poznane metody można było zaaplikować w sytuacji nowej, nieszablonowej. Refleksja w i nad matematycznym działaniem jest niezbędna dla rozwoju myślenia matematycznego. „Refleksja jest poczuciem sensu wykonywanych działań" [Filipiak, 2008]. To dzięki niej odnajdujemy porządek i ład w pozornie chaotycznej strukturze problemu matematycznego, doznajemy olśnienia i dajemy sobie szansę na przeżycie tego, co w literaturze nazywane jest „momentem »aha!«" [np. Stix, 2011].

Jak więc powinno się pracować nad zadaniami matematycznymi? Drogę właściwej, efektywnej dla rozwoju myślenia matematycznego pracy opisuje G. Polya [Polya, 2009]. Według niego należy postępować według następującego planu:

1. Zrozumienie zadania (zadawanie odpowiednich pytań, zrozumienie celu),
2. Układanie planu rozwiązania (rozpatrzenie zadania z różnych stron, uwypuklenie szczegółów, powiązywanie szczegółów, poszukanie interpretacji całości),
3. Wykonywanie planu (działanie zgodnie z przyjętym sposobem postępowania),
4. Rzut oka wstecz (prawdzanie poprawności rozwiązania, ponownie wykonanie określonego toku, poznanie zdolności).

Dla zrozumienia zadania i ułożenia planu rozwiązania bardzo istotnym elementem kultury matematycznej jest wiedza, znajomość pojęć i doświadczenie (refleksyjne) w matematycznym działaniu. „Dobre pomysły oparte są na zdobytym uprzednio doświadczeniu i wiedzy" [Polya, 2009]. J. Hadamard w książce *Psychologia odkryć matematycznych* przekonywał, że nie myśli słowami, lecz pojęciami. „Samo pamiętanie pewnych faktów jest niewystarczające dla powstania dobrego pomysłu, ale nie można mieć żadnych dobrych pomysłów, nie przypominając sobie odpowiednich faktów: same materiały budowlane nie wystarczą do zbudowania domu, ale nie można zbudować domu nie zebrawszy potrzebnych materiałów" [Polya, 2009]. Planując rozwiązanie, „uczeń powinien rozpatrzyć podstawowe elementy zadania wielokrotnie i z różnych stron. Jeżeli z zadaniem związana jest pewna figura, powinien zrobić rysunek i wskazać na nim niewiadomą oraz dane. Jeżeli trzeba te elementy jakoś nazwać, powinien wprowadzać odpowiednie oznaczenia, poświęcając nieco uwagi właściwemu wyborowi symboli, powinien rozważyć te obiekty, dla których ma wybrać symbole" [Polya, 2009]. Konieczne jest oczywiście zadawanie stosownych pytań, co podkreślono wcześniej w niniejszym tekście. Obok już wymienionych Polya sugeruje wykorzystanie jeszcze jednego, dodatkowego: „jest jeszcze jedno pytanie, które może być użyteczne na przygotowawczym etapie […]: czy warunki te można spełnić?" [Polya, 2009].

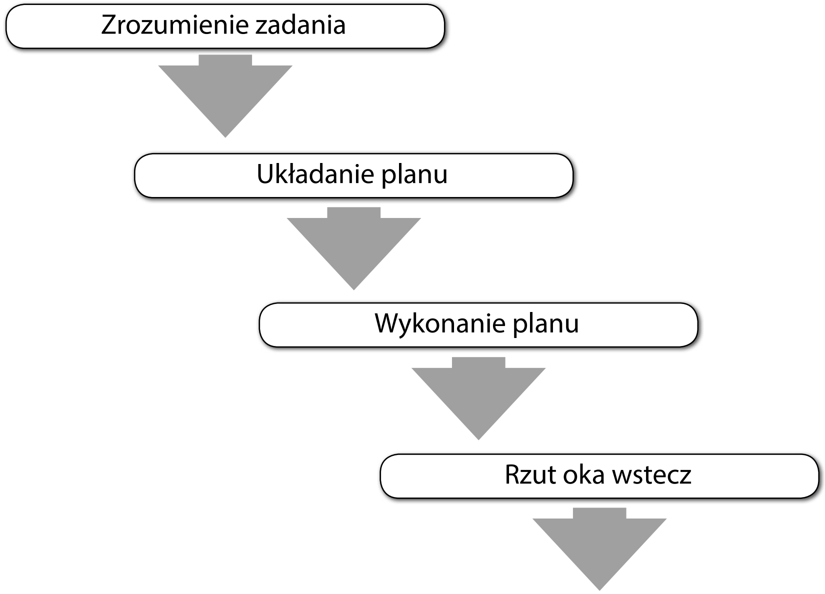
Etap układania planu możemy uznać za zamknięty, gdy jesteśmy w stanie nakreślić posunięcia niezbędne do otrzymania wyniku. „Plan mamy wtedy, gdy wiemy – przynajmniej w zarysie – jakich obliczeń lub konstrukcji musimy dokonać, aby otrzymać niewiadomą" [Polya, 2009]. Należy pamiętać, że „Plan daje nam tylko ogólny szkic rozwiązania. Musimy się przekonać, że wszystkie szczegóły mieszczą się w ramach tego szkicu" [Polya, 2009].

Etap nazwany rzut oka wstecz, pozornie kojarzący się wyłącznie ze sprawdzeniem poprawności wyniku, może być również niezwykle istotny dla „zapamiętania" użytych mechanizmów rozumowania i dostrzeżenia natury matematycznych problemów. „Dobry nauczyciel powinien zrozumieć (i wpoić ten pogląd w swoich uczniów), że żaden problem nigdy nie jest wyczerpany całkowicie. Zawsze coś zostaje jeszcze do zrobienia: badając problem dostatecznie wnikliwie, możemy ulepszyć każde rozwiązanie, a w każdym razie zawsze udoskonalić nasze zrozumienie rozwiązania" [Polya, 2009]. Nieoceniona, o ile zostanie wykorzystana, może być też umiejętność porównania rozwiązania zadania z innymi. „Mamy naturalną sposobność do zbadania związków naszego zadania z innymi, gdy spoglądamy wstecz na jego rozwiązanie" [Polya, 2009]. Jak wcześniej, także i tutaj refleksja jest warunkiem koniecznym skuteczności edukacyjnej opisanych poczynań.

Cztery punkty opisane przez G. Polyę autorzy książki *Matematyczne myślenie*, J. Mason, L. Burton i K. Stacey [Mason i in., 2005], konkretyzują w następujący sposób:

1. Rozpoznanie (postawienie podstawowych pytań: co wiem? czego chcę się dowiedzieć? czego mogę się dowiedzieć?)
2. Atak (sformułowanie hipotezy/hipotez, uzasadnienie jej i rozwiązanie)
3. Przegląd (refleksja nad kluczowymi momentami zadania).

Chociaż „może się wydawać, że z tych trzech faz najważniejszy jest Atak, ponieważ obejmuje główną część czynności mających charakter niewątpliwie matematyczny" [Mason i in., 2005], to jest jednak inaczej. „Faza ataku może rozpocząć się dopiero po należytym Rozpoznaniu problemu" [Mason i in., 2005]. „Rozpoznanie często zaczyna się od konkretyzacji, aby w pełni zrozumieć pytanie." [Mason i in., 2005]. Do tego etapu należy zaliczyć wszystkie podjęte czynności, prowadzące do sformułowania hipotezy. Niezwykle ważne jest postawienie kluczowych pytań: co wiem? czego chcę się dowiedzieć?

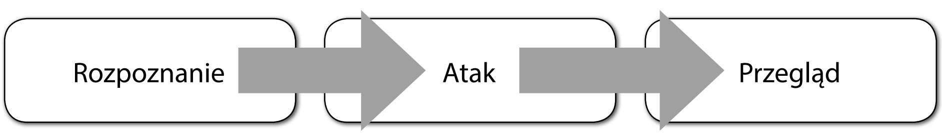



Schemat 3. Fazy rozwiązywania zadania według G. Polyi

Źródło: Polya, 2009

Zdaniem J. Masona, L. Burtona i K. Staceya, do fazy Ataku powinniśmy przechodzić dopiero, gdy mamy już „poczucie, że w pełni rozumiemy problem, tak jakbyśmy sami go sformułowali". W czasie realizacji etapu Ataku najczęściej mamy do czynienia z zaistnieniem momentów „utknięcia" oraz wspomnianego wcześniej momentu „aha!". „Szukanie rozwiązania w fazie Ataku polega na konkretyzacjach i uogólnieniu" [Mason i in., 2005].

Ostatni etap pracy nad zadaniem to Przegląd. „Konieczne jest sprawdzenie rozumowania oraz refleksja nad kluczowymi krokami, a także zastanowienie się nad możliwością rozwinięcia zastosowania metod i uzyskanych rezultatów, tak aby były poprawne w szerszym kontekście" [Mason i in., 2005]. Dotarcie do tego etapu nie musi oznaczać wcale końca pracy nad zadaniem. „Odkrycie błędu może spowodować cofnięcie się do Rozpoznania lub Ataku, a jeżeli pojawi się nowe, interesujące pytanie, na przykład dzięki uogólnieniu rozwiązania, cały proces zaczyna się od nowa" [Mason i in., 2005].




Schemat 4. Fazy rozwiązywania zadania według J. Masona, L. Burtona i K. Staceya

Źródło: Mason, Burton, Stacey, 2005

Podsumowując swoje podejście, J. Mason, L. Burton i K. Stacey sformułowali 5 założeń [Mason i in., 2005]:

1. Jesteś w stanie myśleć matematycznie.
2. Matematyczne myślenie można usprawnić dzięki praktyce połączonej z refleksją.
3. Matematyczne myślenie prowokują sprzeczności, napięcia i niespodzianki.
4. Matematycznemu myśleniu sprzyja atmosfera swobodnego zadawania pytań, rzucania wyzwań i refleksji.
5. Matematyczne myślenie pomaga w zrozumieniu siebie i świata.

Praca nad wymiennymi słabymi stronami kultury matematycznej polskich uczniów może się okazać fundamentalna dla rozwoju ich myślenia matematycznego i poprawy wyników w badaniach PISA. Jest to oczywiście niezwykle trudne, zwłaszcza gdy ograniczeni jesteśmy napiętym harmonogramem, w którym brak czasu na zagłębianie się w poszczególne zagadnienia. Tym ważniejsza i cenniejsza staje się kultura samodzielnej edukacji wśród uczniów. Należy jednak pamiętać, że tego również muszą się oni nauczyć, a nie zrobią tego inaczej jak poprzez czerpanie z kultury matematycznej środowiska szkolnego. Tym samym warto podkreślić, że „właśnie na lekcjach matematyki jest szczególnie ważne, by odejść od *przerabiania materiału* i wciąż na nowo mierzyć się z wyzwaniem, aby pokazać uczniom na czym polega matematyczne podejście do problemu" [Spitzer, 2008], ponieważ „efektem spotkań edukacyjnych powinno być przede wszystkim rozumienie, a nie samo wykonanie" [Bruner, 2006].

## 6. Podsumowanie

U źródeł badania PISA leży przekonanie, że dbałość o system edukacji to fundament rozwoju gospodarczego. Kiedyś wybitny polski matematyk Hugo Steinhaus powiedział, że „kraj bez matematyki nie wytrzyma współzawodnictwa z tymi, którzy uprawiają matematykę". Warto pamiętać o tym, że nawet najlepsze rozwiązania systemowe nie zastąpią doniosłości panującego w społeczeństwie przekonania o sensowności i wartości nauki, szacunku dla wiedzy. Ucząc się matematyki, każdy musi przejść pewną drogę samodzielnie, przeżyć doświadczenie matematyczne, aby rozwinąć charakterystyczny dla tej dyscypliny sposób myślenia – myślenia matematycznego. Wymaga to jednak pewnego wysiłku, staranności i sumienności w wykonywaniu rozpoczętego zadania, które nie dadzą przecież od razu wspaniałych, wyrazistych rezultatów. Dawno temu Euklides powiedział, że „w matematyce nie ma drogi specjalnie dla królów". Można do tego dodać, że w nauce matematyki nie ma też drogi na skróty. Tylko czy taka sumienna postawa jest odbierana z szacunkiem? Mówiąc inaczej, czy kultura uczenia się, o którą stara się dbać szkoła, zostaje zrozumiana i doceniona na zewnątrz? Odpowiadając na to pytanie, warto pamiętać, że „wynik badania PISA jest nie tyle odbiciem sytuacji panującej w szkole, ile odzwierciedleniem stanu społeczeństwa" [Spitzer, 2008]. Przed szkołą stoi tym samym nieustające wyzwanie, aby pozostać miejscem, w którym rodzi się i rozkwita kultura matematyczna młodych ludzi.

J. Bruner w książce *O poznawaniu* przyrównywał zadania matematyczne do łamigłówek. „Łamigłówka raz zrozumiana okazuje się prosta w sposób tak oczywisty, że jak to kiedyś z desperacją powiedział Bertrand Russell jest rzeczą zdumiewającą, iż ktokolwiek może mieć w ogóle jakiekolwiek trudności z matematyką" [Bruner, 1971].

Warunkiem, aby matematyczne łamigłówki stały się proste, jest jednak refleksja, której fundamentem są stawiane pytania. W kontekście tej wypowiedzi jeszcze więcej na wyrazistości zyskuje cytowane uprzednio stwierdzenie autorów *Myślenia matematycznego*, że warunkiem koniecznym dla efektywnego uczenia się matematyki jest refleksja nad tym, co czynimy. Ten rodzaj refleksji jest bowiem gwarantem inspirującego poczucia sensu wykonywanych działań.

## Bibliografia


Bartnik E. i in. [2006]. *Wyniki badania PISA 2006 w Polsce*. Warszawa: Ministerstwo Edukacji Narodowej.

Bruner J.S. [2006]. *Kultura edukacji*. Kraków: Wydawnictwo Universitas.

Bruner J.S. [1971]. *O poznawaniu*. Warszawa: Państwowy Instytut Wydawniczy.

Butterworth B. [1999]. *What Counts: How Every Brain is Hardwired for Math*. Nowy Jork: Free Press.

Filipiak E. (red.) [2008]. *Rozwijanie zdolności uczenia się*. Bydgoszcz: Wydawnictwo UKW.

Federowicz M. (red.) [2008]. *Umiejętności polskich gimnazjalistów*. Warszawa: Wydawnictwo IFiS PAN.

Grothendieck A. [1985]. *Récoltes et Semailles; Réflexions et témoignages sur un. passé de mathématicien*. Montpellier: Preprint, Université des Sciences et Techniques de Languedoc.

Gruszczyk-Kolczyńska E. [1989]. *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?* Warszawa: Wydawnictwo IWZZ.

Hadamard J. [1964]. *Psychologia odkryć matematycznych*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Haman J. i in. [2009]. *Wyniki badania PISA 2009 w Polsce*. Warszawa: Ministerstwo Edukacji Narodowej.

Krygowska Z. [1975]. *Niektóre tendencje występujące w matematyce współczesnej a nauczanie matematyki w szkole powszechnej*. Matematyka nr 2.

Mason J., Burton L., Stacey K., [2005]. *Matematyczne myślenie*. Warszawa: Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.

Nisbett R. [2010]. *Inteligencja Sposoby oddziaływania na IQ*. Sopot: Smak Słowa.

Niss M. [2003]. *Quantitative Literacy and Mathematical Competencies*. Princeton: NCED.

Nowak W. [1989]. *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*. Warszawa: PWN.

Nowik J. [2011]. *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej.* Opole: Wydawnictwo Nowik Sp.j.

Polya G. [2009]. *Jak to rozwiązać?* Warszawa. Wydawnictwo Naukowe PWN.

Siwek H. [2005]. *Dydaktyka matematyki: teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*. Kraków: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Spitzer M. [2008]. *Jak się uczy mózg?* Warszawa: Wydawnictwo PWN.

Stix G. [2011]. *Uczymy się uczyć*. W: „Scientific American – Świat Nauki" nr 9/11.