Problemy Matematyczne
11 (1989), 101–107

Решение краевой задачи Шварца для круга с разрезами

Л.И. Померанцева

Краевая задача Шварца для многосвязной области тесно связана с классической задачей Дирихле и с точки зрения существования решения изучена достаточно подробно. Фактическое построение ее решения основано на применении теории интегральных уравнений Фредгольма и потому представляет значительные вычислительные трудности. В связи с этим представляет интерес нахождение многосвязных областей частного вида, для которых решение краевой задачи можно построить без использования теории интегральных уравнений.

Известны такие классы областей, например, плоскость с разрезами, лежащими на одной прямой или окружности; автором решена задача Шварца для плоскости с разрезами на двух взаимно перпендикулярных прыамых. Данная работа посвящена решению задачи Шварца для области, которая представляет собой круг с симетричными разрезами на двух взаимно перпендикулярных прямых.

Конструктивное решение задачи Шварца для такой области основано на построении вспомогательной римановой поверхности и последующим выражении решения задачи через основные функционалы построенной поверхности.

Пусть D – $(4n+1)$-связаная область, полученная удалением из единичного круга прямолинейных отрезков

$$[(-1)^l a_k; (-1)^l b_k]; \quad [(-1)^l c_k^{(-1)^l} i; (-1)^l d_k^{(-1)^l} i],$$

$k = (1, \ldots, n)$, $l = 1, 2$; a_k, b_k, c_k, d_k - действительные числа.

Пусть L-граница области D.

Ставится задача о конструктивном построении оператора Шварца для области D, то есть оператора, дающего решение следующей краевой задачи

$$R_e F(t) = c(t), \quad t \in L,$$

где $c(t)$- заданная действительная интегрируемая функця, $F(z)$-неизвестная аналитическая в D функция.

Оператор Шварца является интегральным:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L c(t)S(z;t)dt + i\beta,$$

где β- произвольная действительная постоянная.

Вопрос о построении оператора Шварца равносилен вопросу о построении ядра Шварца $S(z;t)dt$. Пусть $S^0(z;t)dt$ ядро Шварца в том частном случае, когда существует однозначное решение задачи; оператор Шварца в этом случае называется однозначной частью оператора Шварца. Рассмотрим вспомогательную область D_1, полученную удалением из плоскости отрезков

$$[(-1)^l a_k^{(-1)^l}; (-1)^l b_k^{(-1)^l}];\ [(-1)^l c_k^{(-1)^l} i; (-1)^l d_k^{(-1)^l} i],\ l = 1,2$$

Пусть $S_1^0(z;t)dt$ однозначная часть ядра Шварца для области D_1. Используя принцип симметрии, построим замкнутую риманову поверхность R, на которую можно аналитически продолжить ядро Шварца $S_1^0(z;t)dt$.

Для этого четыре экземпляра области D_1 склеим по следующему закону: вдоль контуров $[(-1)^l a_k^{(-1)^l}; (-1)^l b_k^{(-1)^l}]$; $l = 1,2$ склеивание производится по законы подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

вдоль контуров $[(-1)^l c_k i; (-1)^l d_k i]$, $l = 1,2$ по закону подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Снабжая поверхность естественной конформной структурой, получаем ориентируемую риманову поверхность R. Найдено алгебраическое уравнение поверхности R.

$$w^4 + 2\pi_1(1+\pi_2)w^2 + \pi_1^2(1-\pi_2^2) = 0 \qquad (1)$$

где

$$\pi_1 = \pi_1(z) = \prod_k (z^2 - a_k^2)(z^2 - b_k^2)(z^2 - a_k^{-2})(z^2 - b_k^{-2})$$

$$\pi_2 = \pi_2(z) = \prod_k (z^2 + c_k^2)(z^2 + d_k^2)(z^2 + c_k^{-2})(z^2 + d_k^{-2})$$

Зная уравнение поверхности, можно построить базис абелевых дифференциалов первого рода, действительных на границе области D (заметим, что аналитические в области D и действительные на границе области D абелевы дифференциалы первого рода совпадают с действительными на границе области D абелевыми дифференциалами первого рода поверхности R):

(2)
$$dx_m(t) = \frac{t^{2k-1}dt}{(x^2 - P_2 + P_1)};$$
$$k = 1, \dots, 4n-1; \quad m = 1, \dots, 4n-1);$$
$$dx_m(t) = \frac{xt^{2k}dt}{(x^2 - P_2 + P_1)};$$
$$k = 0, \dots, 2n-1; \quad m = 4n, \dots, 6n-1);$$
$$dx_m(t) = \frac{t^{2k}(P_1 + P_2)}{(x^2 - P_2 + P_1)x};$$
$$k = 0, \dots, 2n-1; \quad m = 6n, \dots, 8n-1)$$

где π_1, π_2 заданы формулами (1)

$$P_1 = \pi_1(t); \qquad P_2 = \pi_2(t).$$

Дла того, чтобы построить базис абелевых дифференциалов, действительных на границе области D, надо подобрать такие комбинации элементов базиса (2), которые дейцтвительны не только на границе области D_1, но и на единичной окружности. Для этого выясним, какие элементы базиса (2) в симметричных относительно окружности точках принимают сопряженные значения и строим базис абелевых дифференциалов, действительных на L:

(3)
$$dV_k = dx_m + dx_l; \quad l = 4n - m;$$
$$m = 1, \dots, 2n; \quad k = 1, \dots, 2n$$

$$dV_k = dx_m + dx_l; \qquad l = 12n - m - 1;$$

$m = 4n, \dots, 6n-1; \qquad k = 2n+1, \dots, 4n$
где dx_m заданы формулами (2).

Теперь можно приступить к построению ядра Шварца для области D. Ядро Шварца $S_1^0(z;t)dt$ для вспомогательной области D имеет вид [8]:

$$S_1^0(z;t)dt = \frac{(w_1^2 - \overline{x_1}^2)t + z(x_1 w_1 - \overline{x_1 w_1})}{(x_1^2 - P_2 + P_1)(t^2 - z^2)} dt,$$

где функции $w_1 = i\sqrt{\pi_1}^0 + \sqrt{\pi_2}^0$, $x_1 = i\sqrt{P_1}^0 + \sqrt{P_2}^0$ здесь $+\sqrt{\pi_1}^0$; $+\sqrt{\pi_2}^0$; $+\sqrt{P_1}^0$; $\sqrt{P_2}^0$ те фиксированные ветви корней, которые при z; $t \longrightarrow \infty$ имеют разложения

$$\sqrt{\pi_1}^0 \sim z^{4n} + \dots; \quad \sqrt{\pi_2}^0 \sim z^{4n} + \dots; \quad \sqrt{P_1}^0 \sim t^{4n} + \dots; \quad \sqrt{P_2}^0 \sim t^{4n} + \dots$$

Исходя из ядра Шварца для области D_1 построим ядро $S^0(z;t)dt$, которое обладает следующими свойствами:

1) $S^0(z;t)dt \sim \frac{2dt}{t-z}$, при $t \longrightarrow z$

2) при $t \neq z$, $t \neq 0$, $z \neq 0$ функция $S^0(z;t)dt$ аналитически зависит от z и от t в области D.

3) $S^0(z;t)dt = 0$, если $z \in L$, $t \in L$;

4) при $z = 0$ функция имеет полюс, причем все коэффиценты главной части разложения в окрестности нуля являются линейными комбинациями элементов базиса (3).

Введем функции:

$$\overline{S_2^0(z;t)dt = S_1^0(\bar{z}^{-1}; w_1(\bar{z}^{-1}); \bar{t}^{-1}; x(\bar{t}^{-1}))d\bar{t}^{-1}} =$$

$$= S_1^0(z^{-1}; w_2(z^{-1}); t^{-1}; x_2(t^{-1}))dt^{-1};$$

$$S_3^0(z;t)dt = S_1^0(z^{-1}; w_2(z^{-1}); t; x_1(t))dt;$$

$$S_4^0(z;t)dt = \overline{S_1^0(\bar{z}; w_2(\bar{z}); \bar{t}^{-1}; x(\bar{t}^{-1}))d\bar{t}^{-1}} =$$

$$= S_1^0(z; w_1(z^{-1}); t^{-1}; x_2(t^{-1}))dt^{-1};$$

где w_k фиксированные ветви функций $w(z)$

$w_1(z) = i\sqrt{\pi_1}^0 + \sqrt{\pi_2}^0$; $\quad w_3 = i\sqrt{\pi_1}^0 - \sqrt{\pi_2}^0$

$w_2(z) = -i\sqrt{\pi_1}^0 + \sqrt{\pi_2}^0$; $\quad w_4 = -i\sqrt{\pi_1}^0 - \sqrt{\pi_2}^0$

$x_k = w_k(t)$; $\ t \in L$

Тогда сумма

$$S^0(z;t)dt = (\frac{1}{2})\sum_{k=1}^{4n} S_k^0(z;t)dt \tag{4}$$

обладает свойствами 1)-4), указанными выше и, следовательно, является однозначной частью ядра Шварца для области D.

То есть функция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L S^0(z;t)c(t)dt + i\beta$$

решает задачу Шварца для области D в предположении, что существует однозначное решение задачи, то есть выполняются условия

$$\int_L c(t)dv_k(t) = 0; \qquad k = 1,\ldots,4n, \tag{5}$$

где dv_k дифференциалы базиса (3).

Для построения оператора Шварца в случае отсутствия однозначного решения рассмотрим видоизмененную задачу Шварца:

$$Re\phi(t) = c(t) - \sum_{k=1}^{4n}\alpha_k Re\int_{c_1 i}^{t} idv_k, \tag{6}$$

где dv_k дифференциалы базиса (3).

α_k-постоянные дейцтвительные числа, путь интегрирования полностью находится в области D.

Подберем α_k таким образом, чтобы выполнялось условие (5):

$$\int_L (c(t) - \sum_{k=1}^{4n}\alpha_k Re\int_{c_1 i}^{t} idv_k)dv_l = 0, \quad l = 1,\ldots,4n.$$

Для определения α_k имеем систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{4n}\alpha_k(\int_L Re\int_{c_1 i}^{t} idv_k)dv_l = \int_L c(t)dv_l; \quad l = 1,\ldots,4n.$$

Определитель системы отличен от нуля; решая систему способом Крамера, находим α_k. Тогда решение задачи (6) определяется формулой

$$\phi(z) = i\beta + \frac{1}{2\pi i}\int_L (c(t) - \sum_{k=1}^{4n} \alpha_k Re \int_{c_1 i}^{t} idv_k) S^0(z;t)dt,$$

где $S^0(z;t)dt$ находится по формуле (4), β-произвольная действительная постоянная. Тогда функция

$$F(z) = \phi(z) + \sum_{k=1}^{4n} \alpha_k \int_{c_1 i}^{z} idv_k$$

решает задачу Шварца для области D.

Литература

[1] Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей, М.И.Л. 1960

[2] Чеботарев Н.Г. Теория алгебраических функций, Гостехиздат, 1948

[3] Мусхелишвили В.И. Сингулярные интегральные уравнения, М. "Наука"

[4] Гахов Ф.Д. Краевые задачи, М. Физматгиз, 1963

[5] Зверович З.И. Краевые задачи теории аналитических функций, УМН 26: 1 (157), 1971

[6] Зверович З.И. Построение в явном виде аналога ядра Коши на римановых поверхностях некоторых алгебраических функций, Матем. заметки 8: 6, 1970

[7] Аксентьев Л.А. Построение оператора Шварца методом симметрии, Труды семинара по краевым задачам, вып. 4, Изд. Казанского ун-та, 1967

[8] Померанцева Л.И. О конструктивном построении оператора Шварца для одной многосвязаной области, Изв. учеб. заведений, Математика, # 5690-73Деп., Казань, 1973

Черкасский пединститут
Черкассы 257000
ул. К. Маркса 24

Received before 23.12.1988