Problemy Matematyczne
14 (1995), 37 - 48

Kształtowanie dojrzałości matematycznej studentów Faza krytycyzmu

Ryszard Jerzy Pawlak

Zadania jakie stoją przed szkołą wyższą w zakresie kształcenia studentów kierunków matematycznych ewoluują w kierunku zwiększenia ich samodzielności naukowej i pogłębiania kultury matematycznej. Fakt ten dotyczy w równej mierze osób przygotowujących się do pracy w szkole, jak też studentów specjalizujących się w zakresie matematyki stosowanej oraz oczywiście kandydatów na pracowników naukowych. Przykładowo Z. Krygowska pisze: *Kształcenie studenta na dobrego nauczyciela matematyki wymaga takiej oraganizacji studiów, aby mógł on i musiał studiować samodzielnie i nawet przeprowadzić skromne badania naukowe*[1]. O konieczności wprowadzenia studentów w sferę prac badawczych wspomina w swoich artykułach wielu specjalistów z zakresu szkolnictwa wyższego[2]. Niestety dostrzeganie takiej

[1] Z. Krygowska, *Problemy nowoczesnego kształcenia nauczyciela matematyki*, Wiad. Mat. XIV (1972).

[2] Między innymi: J. Pieter, *Praca naukowa*, Katowice (1960); T. Czeżowski, *Logika, jej problemy i wyniki z punktu widzenia ich przydatności dla rozwiązywania zagadnień dydaktycznych* [w:], B. Suchodolski (red.), *Nauki filozoficzne współdziałające z pedagogiką*, Warszawa (1966); R. Kwiatkowski, *O potrzebie kształcenia studentów w zakresie logiki i metodologii badań*, Dydaktyka Szkoły Wyższej 2 (66) (1984).

konieczności nie jest równoznaczne z faktycznym mobilizowaniem studentów do pracy innowacyjnej i twórczej. Sytuacja ta jest wynikiem zarówno nikłego przenikania teorii dydaktycznych do praktyki prowadzenia zajęć w szkołach wyższych, jak też niewielkiego dotychczas zaawansowania badań nad problemami dydaktyki matematyki w szkole wyższej.

Podjęte w ośrodku łódzkim badania mają m.in. na celu ustalenie warunków w których może zaistnieć tak specyficzna aktywność studentów, która może przeistoczyć się w działalność innowacyjną i twórczą. Mówiąc precyzyjniej, dążymy do szczegółowego zbadania procesu dochodzenia do twórczej aktywności[3] studentów. Już wstępne badania pozwoliły ustalić, że ważnym etapem na tej drodze jest przyjęcie przez nich postawy konstruktywnie krytycznej[4] w stosunku do osiągnięć innych osób. Postawa taka staje się wówczas główną siłą motywującą i pobudzającą własną aktywność, a przede wszystkim uzasadniającą dążenie do uzupełniania lub skorygowania wcześniejszych rezultatów.

Trzeba jednak podkreślić, że umiejętność krytycznej oceny prac i opracowań matematycznych nie jest łatwa. Przeprowadzone (w ramach badań dotyczących problemów prowadzenia prac magisterskich z matematyki teoretycznej) obserwacje i eksperymenty dowiodły[5], że w przekonaniu 78% studentów, przedstawione im artykuły naukowe, podręczniki i monografie, które stanowią podstawę ich prac magisterskich, są niemal doskonałe[6]. Jeżeli natomiast spotkają się z różnymi ujęciami danego tematu, to dążą do wybrania jednego z nich, jako "najlepszego", przy czym, jak sami przyznają w 44% przypadków, wybór ten jest "intuicyjny". Oznacza to, że ich postawa apolo-

[3]Oznacza to taką formę aktywności, która prowadzi do nowych twierdzeń, uogólnień pojęć lub twierdzeń oraz do uproszczenia dowodów, stanowiących znaczący wkład w rozwój danej teorii. Aktywność twórcza to również umiejętność samodzielnego formułowania problemów, których rozwiązanie (często nietrywialne) stwarza nowe możliwości badań i rozwoju teorii.

[4]Tzn. takiej, że dostrzeżone mankamenty i niedociągnięcia stają się inspiracją do poszukiwania innych, lepszych rozwiązań, przy równoczesnym docenieniu wagi i znaczenia osiągnięć innych ludzi.

[5]Badania prowadzone były w ramach *Badań Centralnie Finansowanych* (RPBP III.30), a częściowe wyniki zostały zamieszczone w artykule *Prace magisterskie z zakresu matematyki teoretycznej jako element kształcenia nauczycieli matematyki*, Problemy Dydaktyczne Matematyki t.V, Zielona Góra (1991) str. 83-91.

[6]W tym sensie, że nie widzą potrzeby ich istotnej modyfikacji (z wyłączeniem uzupełnienia brakujących szczegółów dowodowych oraz zilustrowania pewnych faktów rysunkami).

getyczna nie wynika z neutralności oceny.

Spostrzeżenia te dowodzą celowości podjęcia szerszych badań dotyczących fazy krytycyzmu występującej w procesie przejścia od analizy faktów matematycznych do aktywności twórczej. zbadania etapów przebiegu tej fazy oraz możliwości oddziaływań dydaktycznych ułatwiających dojście do niej (wytworzenia postawy konstruktywnie krytycznej), kontroli jej przebiegu oraz możliwości wykorzystania jej rezultatów. W niniejszym opracowaniu przedstawimy dotychczasowe ustalenia jakie zostały osiągnięte w ramach prac prowadzonych nad tym tematem.

Wyróżnijmy na wstępie pewne kategorie tej fazy, uzależnione od celów, zakresu oraz tematu rozważań krytycznych. Każda z tych kategorii składa się ze specyficznych dla siebie etapów oraz podlega specjalnym (charakterystycznym tylko dla niej) prawom dydaktycznym. Nie oznacza to oczywiście, że kategorie te nie przenikają się oraz nie wiążą w skomplikowane łańcuchy wzajemnych układów i powiązań. Temat ten wykracza jednak poza ramy tej pracy. Dla jasności obrazu omawianych tu problemów dokonamy więc wyraźnego podziału, umożliwiającego precyzyjne omówienie interesujących nas zagadnień.

Wyróżnimy zatem następujące kategorie:

A. Merytoryczną
B. Semantyczno - semiotyczną
C. Elementaryzacji oraz lokalnej struktury
D. Struktury globalnej

We wszystkich tych przypadkach właściwa faza krytycyzmu poprzedzona powinna być głęboką analizą faktów matematycznych oraz podjęciem próby **ustalenia intencji autorów** poszczególnych opracowań. To ostatnie działanie można uznać już za wstępny etap fazy krytycyzmu (etap zerowy), w którym studenci powinni dokonać analizy dostępnych im materiałów pod kątem celów, jakie zamierzali osiągnąć autorzy poszczególnych prac. Oczywiście również ten etap będzie przebiegał w różny sposób dla różnych kategorii. Niemniej jednak jest on wspólnym początkiem całej fazy krytycyzmu, elementem bez którego niemożliwe jest dojście do etapów zasadniczych. Przeprowadzone obserwacje dowiodły, że brak umiejętności pokonania tego etapu jest w 87% przypadków przyczyną niedotarcia do zasadniczej fazy krytycyzmu. Ważne stają się zatem oddziaływania dydaktyczne przygotowujące studentów do analizy intencji poszczególnych autorów. Oddziaływania takie, to przeprowadzenie odpowiednich wykładów problemowych uwypuklających te zagadnienia oraz szerokie stosowanie tzw. samodzielności kontrolowanej[7]. Konieczne jest więc pokazywanie studentom różnych źródeł opisujących dane zagadnienie z podkreśleniem (na początku studiów) lub pozostawieniem do samodzielnej analizy (w późniejszym okresie) intencji autorów poszczególych koncepcji.

Przejdźmy obecnie do omówienia zasadniczej fazy krytycyzmu w odniesieniu do poszczególnych kategorii.

A. KATEGORIA MERYTORYCZNA

Ważność tej kategorii jest wysoka w równym stopniu dla przyszłych nauczycieli, jak też studentów specjalizujących się w zastosowaniach matematyki oraz przygotowujących się do pracy naukowej. Przeprowadzone rozmowy (ankieta słowna) pokazały jednak, że w pełni doceniają ją jedynie studenci dwóch ostatnich z wymienionych tu grup studenckich - 100% , podczas, gdy osoby przygotowujące się do pracy w szkole uznały jej ważność zaledwie w 66%.

Kategoria ta rozbija się w zasadzie na dwie podkategorie:
A_1 Precyzji wyrażania myśli.
A_2 Siły uzyskanych rezultatów.

Pierwsza z nich dotyczy nie tylko uzupełniania szczegółów dowodowych ale również odpowiedzi na pytanie, czy stosowane metody, sformułowania i zapisy są dostatecznie precyzyjne, czy też może wymagają pewnej korekty (być może gruntownej przebudowy). Druga z tych podkategorii dotyczy analizy celowości przyjętych założeń, ustaleń terminologicznych oraz zakresu uzyskanych twierdzeń.

Pierwszym etapem fazy krytycyzmu w przypadku tej kategorii jest **stworzenie odpowiedniej motywacji**. O ile w przypadku studentów przyszłych nauczycieli i naukowców decydujące są tu motywacje intelektualne, to w przypadku osób specjalizujących się w zakresie zastosowań matematyki dominujące stają się motywacje praktyczne. W każdym jednak z tych przypadków motywacje te muszą być pochodną celu, który chcemy lub możemy osiągnąć.

Zagadnienie to jest bardzo istotne nie tylko dla naszych rozważań, warto

[7]Zagadnienia te są obszernie omówione w pracy: R. Pawlak, *Conducting "Problem lectures" by academic teachers and "Control self-dependence"* Problemy Matematyczne 12.

zatem poświęcić mu nieco więcej miejsca.

Najczęstszą podstawą zarówno motywacji intelektualnej, jak też praktycznej jest dostrzeżenie, że istnieją przypadki "zachodzenia tezy bez spełnienia założeń". Przykładowo znane jest twierdzenie Baire'a o kategoriach *każda przestrzeń metryczna zupełna jest II kategorii*. Można jednak znaleźć liczne przykłady przestrzeni niezupełnych (nawet niemetryzowalnych), które są zbiorami II kategorii. Sytuacja ta powoduje powstanie motywacji do poszukiwania warunków (słabszych niż zupełność) wystarczających do stwierdzenia: przestrzeń jest II kategorii[8].

Inny rodzaj motywacji, to motywacje o charakterze indukcyjno - uogólniającym oraz motywacje specyfikujące. W pierwszym przypadku pytamy o prawdziwość pewnych faktów w bardziej ogólnych przestrzeniach (lub wymiarach). Motywacje specyfikujące związane są natomiast z pytaniami dotyczącymi możliwości opisu własności obiektów podrzędnych.

Z kategorią tą związane są również motywacje elementaryzacyjne oraz precyzująco - formalizujące. Związane są one zarówno z przystępnością, jak też poprawnością faktów matematycznych.

W każdym z przedstawionych powyżej przypadków istotna jest umiejętność stawiania pytań oraz matematyczna odwaga intelektualna w ich formułowaniu. Dostrzeżenie tego faktu implikuje rodzaj oddziaływań dydaktycznych mających przygotować studentów do tworzenia odpowiednich motywacji.

Najogólniej można powiedzieć, że oddziaływania te polegają na przyzwyczajaniu ich do stawiania pytań oraz czynnego czytania tekstu matematycznego. W praktyce oznacza to konieczność stawiania pytań podczas wykładów (na które odpowiada sam wykładowca - swego rodzaju dialog wykładowcy z samym sobą)[9] oraz wspólne, czynne odczytywanie tekstu matematycznego podczas ćwiczeń. Dopiero później można (np. podczas seminariów) pozostawić studentom większą swobodę w tym zakresie. Przeprowadzone eksperymenty dowiodły bowiem, że pominięcie któregokolwiek z wstępnych zabiegów (zbyt wczesne, całkowicie samodzielne budowanie pytań, jako tworzenie motywacji do działań twórczych), prowadzi do *działań przyczynkarskich* wynikających z braku przekonania co do możliwości istotnego poprawienia uzyska-

[8] Por. np. prace: R.C. Haworth, R.A. McCoy, *Baire spaces*, Dissert. Math. CXLI (1977), pp.1-77 i R.J. Pawlak, *On functions with the set of discontinuity points belonging to some σ-ideal*, Math. Slov. 35, pp. 327-341.

[9] Patrz przypis 7.

nych przez innych rezultatów. Przykładowo eliminowanie pytań wykładowcy zmniejszyło o około 60% liczbę studentów budujących głębokie pytania[10] i odczuwających potrzebę wprowadzania zmian oraz modyfikacji. Pominięcie oddziaływań zarówno podczas wykładów jak też podczas ćwiczeń zwiększało tę liczbę do 95%. Nie oznacza to oczywiście propozycji zmniejszania samodzielności studentów, lecz swego rodzaju nauczenie ich tej samodzielności, rozbudzenie ich odwagi intelektualnej oraz ukierunkowanie ich działań.

Kolejnym etapem w przypadku tej kategorii jest **sprecyzowanie celów i obiektów** naszej krytyki. Jest to ważny etap uzależniony od zakresu posiadanej wiedzy oraz wytworzonej wcześniej motywacji. W ramach tego etapu studenci muszą niejednokrotnie poszerzyć swoją wiedzę matematyczną lub ją usystematyzować. Istotne jest przy tym, by nastąpiła najpierw akomodacja wiedzy do wytworzonych motywacji, a dopiero później asymilacja motywacji do poszerzonej wiedzy. Tylko taka kolejność gwarantuje uzyskanie "postępu naukowego". W ramach oddziaływań dydaktycznych przygotowujących studentów do tego etapu ważne jest przekonanie ich o zaletach takiej kolejności działań.

W efekcie tych działań dochodzimy do kolejnego etapu - **sformułowania hipotez krytycznych**, mających na celu usunięcie pozornych lub faktycznych niedostatków ustalonych w poprzednim etapie. Kategorię merytoryczną kończy **selekcja postawionych hipotez** oraz **celów i obiektów naszej krytyki**. Jest ona wynikiem wtórnej analizy wcześniejszych ustaleń oraz warunków, którymi dysponujemy (np. czasu w którym musimy dokonać oceny lub zmian, dostępu do literatury itp.). W tych etapach ustalamy nie tylko co poddajemy krytyce, ale również w którym kierunku idą nasze działania - prowadzi to w efekcie do powstania konstruktywnej krytyki.

Wymienione powyżej etapy mają charakter sekwencyjny (nie należy pomijać żadnego z nich). Doświadczenia prowadzone przy okazji badań dotyczących opieki nad pracami magisterskimi pokazały, że utrzymanie wszystkich tych etapów czyni krytykę istotną fazą dojścia do aktywności twórczej. Zwiększa się w znacznej mierze zainteresowanie studentów pokonaniem trudności oraz następuje swego rodzaju utożsamianie ich z osiągniętymi rezultatami.

Wcześniej zasygnalizowane zostały pewne oddziaływania dydaktyczne mające na celu przygotowanie studentów do realizowania poszczególnych eta-

[10]To znaczy pytania, na które odpowiedzi wzbogacałyby w istotny sposób dane fakty matematyczne.

pów. Były one reprezentatywne dla tej kategorii. Można zatem ogólnie stwierdzić, że w pierwszym okresie studenci powinni obserwować, jak z krytyką merytoryczną radzą sobie doświadczeni naukowcy. Później wskazane jest prowadzenie wspólnych działań w tym zakresie, by następnie przejść do samodzielności kontrolowanej oraz w pełni samodzielnych zabiegów studentów. Przeprowadzone eksperymenty dowiodły, że zachowując powyższe wskazówki wszyscy (!) studenci mogą pomyślnie przejść przez tę kategorię fazy krytyki (ich wątpliwości mogą prowadzić do powstania wartościowych zmian, a aż 80% osiągnęło stan aktywności twórczej). Eliminacja któregokolwiek z wyżej wymienionych elementów zwiększała w sposób znaczący liczbę studentów, których pytania były mało istotne lub też, którzy w ogóle nie byli w stanie krytycznie spojrzeć na merytoryczną stronę poznanych faktów matematycznych.

B. KATEGORIA SEMANTYCZNO - SEMIOTYCZNA

Kategoria ta jest szczególnie ważna dla studentów - przyszłych nauczycieli matematyki. Ze względu na fakt, iż jest ona istotna głównie przy tworzeniu pewnych opracowań, pierwszym jej etapem jest **ustalenie adresata** naszych zabiegów. Inne będzie bowiem nasze spojrzenie na dobór nazw, symboli i metod zapisu, gdy dany tekst jest skierowany do doświadczonych matematyków, a inne, gdy kierujemy go np. do uczniów. W skład tego etapu wchodzi oczywiście również **analiza możliwości odbiorcy**, jego przyzwyczajenia oraz tradycja. Działanie to pozwala przejść do etapu drugiego: **analizy czytelności i porawności**. Kategorię tę kończy trzeci etap: **ustalenia możliwych do wprowadzenia zmian wraz z wyszczególnieniem plusów i minusów tych modyfikacji**. Chodzi w tym przypadku o wszystkie możliwe do zaistnienia propozycje, które w dalszym etapie działania mogą być (w sposób nawet dość oczywisty) odrzucone.

Zasygnalizowane w tym miejscu problemy wydają się dość oczywiste. Okazało się jednak, że przy analizie 80 prac magisterskich stwierdzono, iż studenci w 92% przypadków bezkrytycznie przyjmowali stosowane w wykorzystywanych opracowaniach symbole i oznaczenia, a w 11% analizowanych prac ich autorzy używali różnych symboli w różnych częściach pracy.

Jakie zatem działania dydaktyczne mogą prowadzić do poprawy tej sytuacji? Okazuje się, że nawet dość wyraźne zwracanie studentom uwagi przez wykładowców na te elementy (podczas klasycznych wykładów) nie zostaje przez studentów należycie docenione (tylko 24% pytanych studentów zwróciło na ten fakt uwagę). Bierność studentów podczas tego rodzaju zajęć stanowi barierę uniemożliwiającą właściwy odbiór i interpretację tych faktów. Również pozostawienie całkowitej samodzielności nie daje pozytywnych rezultatów. Okazuje się, że najkorzystniejsze efekty przynosi w tym przypadku stosowanie samodzielności kontrolowanej, tzn. takiej formy pracy ze studentami, gdy budują oni pod kierunkiem(!) i przy dyskretnej pomocy(!) nauczyciela akademickiego swoje (różnorodne) poglądy. Później w toku szerokiej dyskusji między sobą (możliwy jest również udział nauczyciela akademickiego) porównują uzyskane efekty. Nie przynosi natomiast dobrych rezultatów zbyt szybkie przejście do dyskusji (te dość subtelne rozważania wymagają wcześniejszych głębokich przemyśleń), ani też wyłącznie współpraca student - nauczyciel akademicki (dyskusja w gronie rówieśników wzbogaca argumentację oraz pobudza do aktywniejszego działania na tym polu, a ponadto pozwala zrozumieć oraz docenić indywidualną ocenę tego problemu).

C. KATEGORIA ELEMENTARYZACJI ORAZ LOKALNEJ STRUKTURY

Kategoria ta przenika wszystkie pozostałe kategorie, a równocześnie jest sama w sobie na tyle ważna, że warto poddać ją oddzielnej analizie. Dla prawidłowego jej przebiegu niezmiernie istotny jest etap zerowy, w którym należy zwrócić szczególną uwagę na przejrzystość przedstawionych faktów w stosunku do potrzeb oraz celów jakie zamierzano uzyskać.

Zasadniczymi etapami tej kategorii są:

1) krytyczna analiza roli lokalnie przyjętych założeń;

oraz

2) ocena możliwości zrozumienia danych faktów matematycznych.

Etapy te nie mają charakteru sekwencyjnego. Przenikają się one wzajemnie i uzupełniają. Na ich realizację ogromny wpływ mają ustalenia etapu zerowego, a nawet działania podjęte w ramach innych kategorii fazy krytycyzmu. Pomimo, iż w przypadku tej kategorii nie mamy do czynienia z koniecznością wykorzystywania "błyskotliwych pomysłów", to jednak doświadczenia pokazują, że jest to dla studentów jedna z trudniejszych kategorii. Z tych też względów przygotowania do niej muszą być szczególnie staranne. Omówienie tych przygotowań wyjaśni również istotę tej kategorii.

Działania dydaktyczne dotyczące przygotowań studentów do krytyki związanej z elementaryzacją oraz lokalną strukturą materiału można rozpocząć dopiero wówczas, gdy studenci osiągną już znaczny stopień dojrzałości matematycznej. Zbyt wczesne rozpoczęcie tych działań, jak pokazały obserwacje, nie tylko nie przynoszą oczekiwanych efektów, ale prowadzą do znużenia studentów, którzy odbierają działania nauczycieli akademickich jako wymaganie nadmiernej formalizacji. Pracę z nimi w tym zakresie można rozpocząć zatem, gdy poznają oni już istotę dedukcji oraz intuicyjnie zrozumieją zasady lokalnej organizacji materiału matematycznego. Wskazane jest wówczas wspólne z nimi przedyskutowanie prostego fragmentu tekstu matematycznego pod kątem omawianej tutaj problematyki. Fragment ten powinien być dobrany niezwykle starannie i dotyczyć takiego zakresu materiału, który studenci znają w różnych ujęciach. Trzeba przy tym podkreślić, że ze względu na charakter specjalizacji studenckiej różne muszą być kierunki ich przygotowań w tym zakresie. Nie oznacza to istotnego ograniczenia zakresu ich umiejętności, ale ukierunkowanie działań zgodnych z ich zainteresowaniami. Ułatwia im to pokonanie trudności oraz zwiększa stopień zaciekawienia tą problematyką.

W przypadku studentów - przyszłych nauczycieli, szczególny nacisk należy położyć na problematykę elementaryzacji - przyswajalności materiału na różnych szczeblach dojrzałości matematycznej. Obserwacje pokazały jednak, że zwłaszcza w pierwszym okresie pracy nad tym problemem, lepsze rezultaty przynosi analiza faktów z zakresu matematyki wyższej, niż szkolnej. Przykładowo omawiając z nimi zbiór Sierpińskiego na płaszczyźnie[11] można zauważyć, że znacznie uprościmy dowód, a zarazem zwiększymy jego przejrzystość zakładając hipotezę continuum[12]. Później, gdy studenci osiągną już dobre przygotowanie z zakresu dydaktyki matematyki w szkole podstawowej i średniej, można przejść do omawiania z nimi podobnych zagadnień dotyczących matematyki szkolnej. Będzie to stanowiło, oprócz zasadniczego celu, również doskonałe uzupełnienie ich przygotowania dydaktycznego. Studentów, przyszłych naukowców, wskazane jest przygotowywać pod kątem analizy siły uzyskanych wyników oraz precyzji stosowania terminów. Jest to o tyle istotne, że analiza prac magisterskich pokazała, iż w 38% prac studenci przyjmowali złe definicje (w stosunku do ich wykorzystania) lub stosowali inne

[11]Tzn. zbiór nierozłączny z każdym zbiorem domkniętym miary dodatniej na płaszczyźnie oraz taki, że żadne trzy jego punkty nie leżą na jednej prostej - zob. *Fundamenta Mathematicae 1*, p.112.

[12]Zob. J.C. Oxtoby *Measure and category*. Springer-Verlag, New„York-Heidelberg-Berlin (1971).

(równoważne) określenia pojęcia niż te, które zacytowali w pracy. W tym ostatnim przypadku, nie chodzi o definicje równoważne w sposób oczywisty i powszechnie znany, lecz o sytuacje, w których dane określenia różnią się w sposób istotny (np. monotoniczność definiowana jako zachowanie spójności w przeciwobrazach). W tym przypadku pracę ze studentami należy rozpocząć od analizy znaczeń i konsekwencji przyjęcia różnych określeń danych pojęć (np. w definicji zwartości przestrzeni topologicznych jedni autorzy zakładają warunek T_2[13], inni określenie to przyjmują bez tego wymogu[14]). Później można przejść do działań mających na celu zwiększenie siły uzyskanych wyników (np. przez uproszczenie pewnych założeń).

Podobne działania należy prowadzić w stosunku do studentów - przyszłych specjalistów z zakresu zastosowań matematyki, przy czym w tym przypadku istotne jest oczywiście ukierunkowanie pracy na uzyskanie wyników mających maksymalnie szerokie praktyczne zastosowanie.

D. KATEGORIA STRUKTURY GLOBALNEJ

Umiejętność działania w ramach tej kategorii świadczy o dużej dojrzałości matematycznej. Dlatego też do pracy nad tą problematyką można przystąpić dopiero w końcowym etapie studiowania. Wcześniej można przygotować studentów do tego typu działań w ramach wykładów problemowych (chociaż działania nauczyciela akademickiego nie przez wszystkich będą w pełni docenione). Przykładowo omawiając teorię wyznaczników można pokazać dwa sposoby ujęcia tego tematu. Budując teorię według modelu Paula R. Halmosa[15] uzyskujemy bardzo ładną teorię, lecz przy wprowadzeniu wzorów ułatwiających obliczanie wyznaczników musimy przejść do innych, równoważnych definicji. Natomiast przy klasycznym określeniu[16] łatwo dowodzi się użytecznych twierdzeń, lecz zbudowanie całej teorii jest bardziej skomplikowane niż w poprzednim przypadku. Oczywistym jest, że w zależności od swojej specjalizacji matematycznej, studenci za korzystniejsze mogą uznać pierwsze lub drugie z tych ujęć. W dalszej części naszych działań możemy przejść do wspólnej ze studentami dyskusji nad podobnymi problemami[17]. Poczy-

[13] Np. R. Engelking, *Topologia ogólna* Warszawa (1975).

[14] Np. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, wyd. 5, Warszwa (1972).

[15] P.R. Halmos, *Finite dimensional vector spaces.*

[16] Np. A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, Warszawa (1965).

[17] W przypadku szczególnego zainteresowania studentów tymi problemami można zapro-

nione obserwacje pokazały jednak, że najczęściej efekty zadowalające można uzyskać jedynie z najzdolniejszymi studentami. Istotną trudność stanowi bowiem w tym przypadku pokonanie już pierwszego etapu: analiza przejścia od jednostkowych wyników do globalnego ujęcia materiału. Nie mniej trudności sprawia drugi, a zarazem ostatni etap: dyskusja możliwości zastosowania rozwiązań globalnych do poszczególnych fragmentów. Przeprowadzone obserwacje dowiodły, że na styku obu tych (wzajemnie przenikających się) etapów występuje szereg operacji na tyle trudnych, że pokonanie ich dostępne jest z reguły tylko najzdolniejszym studentom. W chwili obecnej zjawiska te są dokładniej badane, a wnioski wynikające z tych badań będą stanowiły treść odrębnego artykułu[18].

Postęp naukowy jaki dokonał się w ostatnich latach sprawia, że treści przekazywane studentom w ramach studiów matematycznych stały się z jednej strony bardziej interesujące, z drugiej natomiast są coraz trudniejsze, a ich przyswojenie i sprawne posługiwanie się nimi sprawia coraz większe kłopoty. Wydaje się, że sytuacja ta wynika z zakłócenia równowagi między wzrostem wymagań merytorycznych oraz stosowanymi rozwiązaniami dydaktycznymi. W efekcie mimo systematycznego zwiększania się zasobu wiedzy studentów, nie wzrasta (a wręcz, jak pokazują liczne badania - maleje) sprawność matematyczna absolwentów szkół wyższych. Fakty te skłoniły mnie do podjęcia szerszych badań w tym zakresie. Rozpoczęły się one od licznych obserwacji, przygotowania teoretycznego oraz teoretycznej analizy zaobserwowanych zjawisk. Później nastąpiła praktyczna weryfikacja przyjętych rozwiązań. Odbywała się ona w naturalnych warunkach dwóch polskich uczelni wyższych. Eliminowanie tworzenia sterylnych, laboratoryjnych warunków badawczych miało na celu uniknięcie zarzutu, iż proponowane rozwiązania dydaktyczne są niemożliwe do praktycznego wykorzystania. Równocześnie dążyłem do wykorzystania w swoich badaniach wszystkich (możliwych do zastosowania) kanonów naukowych. Stworzyło to dobre podstawy do przyjęcia ogólnych wniosków. Nie oznacza to jednak, że wszystkie problemy zostały zbadane, a wszystkie (przedstawione wyżej) rozwiązania można uznać za optymalne.

---

ponować im rozszerzenie płaszczyzny rozważań, poprzez włączenie w ramy dyskusji innych sposobów wprowadzenia wyznacznika (np. zgodnych z książką Z. Opiala, *Algebra Wyższa*, PWN Warszawa (1974) lub artykułem J. Browkina, *O wprowadzeniu pojęcia wyznacznika na wykładzie algebry liniowej*, Wiadomości Matematyczne XXII.1 (1979))

[18]Badania nie są w pełni zakończone.

Uzyskane rezultaty uważam jedynie za wstępne ustalenia, które należy poddać dalszym szczegółowym badaniom. Przykładowo, pomimo stosowania jednakowych metod, studenci przypisywali inne wartości i zainteresowania różnym aspektom i kategoriom fazy krytycyzmu. Wydaje się, że w tym przypadku odpowiedź można uzyskać na gruncie psychologii: *Chociaż ludzie, jak się wydaje, percepują świat w terminach z grubsza biorąc tych samych wymiarów lub tak zwanych zmiennych percepcyjnych, różnią się oni jednak w zależności od względnej ważności, jaką przypisują w procesie percepcji tym wymiarom. Można więc mówić o stałości wymiarów (dla danej sytuacji bodźcowej), natomiast sposób percepcji ich jest indywidualnie zmienny*[19]. Należy przypuszczać, że dokładne zbadanie przedstawionych wyżej zagadnień przyczyni się w istotny sposób do udoskonalenia procesu przekazu wiedzy studentom matematyki oraz ułatwi im zdobywania dojrzałości matematycznej.

UNIWERSYTET ŁÓDZKI
ZAKŁAD METODYKI NAUCZANIA MATEMATYKI
Banacha 22
90-238 Łódź
Polska

[19] J. Wilczyński, *Skalowanie wielowymiarowe jako metoda geometrycznej reprezentacji psychologicznej relacji podobieństwa*, Przegląd Psychologiczny (1980).