ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ w BYDGOSZCZY

Problemy Matematyczne 1986 z. 8

WŁODZIMIERZ ŚLĘZAK

WSP w Bydgoszczy

À PROPOS DE LA CONTINUITÉ FAIBLE

Soit X l'espace normé muni de la norme $\|\cdot\|$, X^* l'espace conjugué à X, c'est-à-dire l'ensemble linéaire des fonctionnelles linéaires (et continues) x^* définies dans X. Un sous-ensemble E_0 de X^* satisfaisant a la condition suivante: pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe une combination lineaire $x^* = a_1 x_1^* + \ldots + a_n x_n^*$ d'elements $x_1^*, \ldots, x_n^*$ de l'ensemble E_0 telle que:

(1) $\|x\| \leq 1$ et $\langle x \mid x^* \rangle > \|x\| - \varepsilon$

est dit un ensemble fondamental de fonctionnelles linéaires([1]). Soit T un espace topologique. Une fonction abstraite $G: T \to X$ sera appelé faiblement continue par rapport à $E_0 \subset X^*$ au point $t_0 \in T$, si x^* étant une fonctionnelle arbitraire de E_0, la fonction réelle $t \mapsto \langle G(t) \mid x^* \rangle$ est continue au point t_0. La notion de la continuité faible par rapport a E_0, l'enemble fondamental de fonctionnelles lineaires, etait développée par A. Aleksiewicz et W. Orlicz dans [1], voir aussi [5].

PROPOSITION 1. Soit T un espace topologique, X un espace normé séparable, E_0 un ensemble fondamental de fonctionnelles linéaires dans X et $G: T \to X$ une application de T dans X

faiblement continue par rapport à E_o . Alors G est aussi fortement continue en tout point d'un sous-ensemble résiduel de T du type G_δ .

DÉMONTRATION:

Pour $n \in N$ et $\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\} \subset E_o$ posons :

(2) $$V(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*; r) := \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : \langle x \mid x_i^* \rangle < r\}, \quad r \in R^+$$

comme une base de voisinages de zéro dans X. Cette base (2) engendre une topologie $\tau(E_o)$ dans X plus faible que la topologie forte [12] et la continuité faible par rapport a E est exactement la continuité par rapport a la topologie obtenue de (2) .

Soit $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ un sous-ensemble dénombrable et dense dans X. En raison du theoreme 3.12 de [18] convenablement adapté , des boules fermées $\bar{K}(d_i, r - 2^{-j})$, $r \in Q^+$, $j \in N$, étant convexes et fortement fermées sont aussi fermées par rapport a la topologie $\tau(E_o)$. L'ensemble de points de discontinuité de $G: T \to X$ est caractérisé par un formule fréquement employé :

(3) $$D_G = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{r \in Q^+} [G^{-1}(K(d_i, r)) - \operatorname{int}_T G^{-1}(K(d_i, r))].$$

Remarquens, que :

(4) $$K(d_i, r) := \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{K}(d_i, r-2^{-j}) \in F_\sigma(X, \tau(E_o))$$

Comme G est $\tau(E_o)$-continue, on peut donc écrire, en tenant compte de (4) que:

(5) $$G^{-1}(K(d_i, r)) = G^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{K}(d_i, r-2^{-j})\right) =$$

$$= \bigcup_{j=1}^{\infty} G^{-1}(\bar{K}(d_i, r-2^{-j})) \in F_\sigma(T).$$ Alors l'ensemble:

(6) $$D(i,r) := G^{-1}(K(d_i, r)) - \operatorname{int}_T G^{-1}(K(d_i, r)) =$$

$$= G_{\infty}^{-1}(K(d_i,r)) \cap [T - \mathrm{int}_T\, G^{-1}(K(d_i, r))] \subset$$
$$\subset \bigcup_{j=1} [G^{-1}(\bar{K}(d_i, r-2^{-j})) - \mathrm{int}_T\, G^{-1}(\bar{K}(d_i, r-2^{-j}))]$$

est un F_σ de premiere catégorie dans T. On a donc:

(7) $D_G = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{r \in Q^+} D(i,r)$ pour une famille dénombrable $\{D(i,r):\ i \in N,\ r \in Q^+\}$ des ensembles maigres du type F_σ, ce qui donne la conclusion souhaitée.

Considérons maintenant comme l'espace X l'espace l_2 composé de toutes les suites réelles $x := (x^1, x^2, \ldots)$ telles que

(8) $\|x\| := \mathrm{sqrt}\ (|x^1|^2 + |x^2|^2 + \ldots) < +\infty$.

L'ensemble E_o des fonctionnelles linéaires de la forme

(9) $X \ni x \longmapsto \langle x \mid e_n^* \rangle := x^n \in R$, ou $n = 1,2,\ldots$

est fondamental dans l'espace l_2. Dans son artiole [8] Z. Grande définit la continuité approximatibe faible par rapport à l'ensemble E_o de (9) et avait posé le problème suivant:

PROBLÈME ([8]): Une fonotion $F: I \to l_2$, $I := [0,1]$, faiblemaut approximativement continue est- elle connexe, c'est-à-dire, $f(J)$ est- il un ensemble connexe pour tout intervalle $J \subset I$?

Ce probleme se resout négativement, en utilisant le theoreme suivante:

PROPOSITION 2. Soit $D \subset I = [0,1]$ un sous-ensemble arbitraire du type F_σ et de première catégorie dans l'intervalle fermé I. Il existe une fonction $G_D: I \to l_2$ faiblement continue par rapport a E_o dont l'ensemble de tous les points auxquels la fonction G_D est continue pour la topologie forte de l_2 est contenu dans $I - D$.

DÉMONSTRATION: D'après le thereme bien connue de Sierpiński [19] on peut décomposer l'ensemble D sous la forme:

$$(10) \qquad D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n, \quad D_n = \mathrm{cl}\, D_n, \quad D_n \cap D_m = \emptyset \text{ si } n \neq m$$

ou tous les ensembles D_n; $n = 1,2,\dots$ sont fermés et disjoint deux à deux. Posóns:

$$(11) \qquad I \ni t \mapsto f(t) := \begin{cases} 2 - 2^{-n} & \text{lorsque } t \in D_n, \ n \in N \\ 2 \text{ lorsque} & t \in I - D \end{cases}$$

et remarquons que la fonction $f: I \to R$ est semicontinue inférieurement. En effet , des images réciproques des demidroites sont fermés :

$$(12) \qquad f^{-1}((-\infty, r]) = \begin{cases} \emptyset \text{ lorsque} & r < 3/2 \\ D_1 \text{lorsque} & 3/2 \leq r < 7/4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \bigcup_{k=1}^{n} D_k \text{ lorsque} & 2 - 2^{-n} \leq r < 2 - 2^{-n-1} \\ I \text{ pour} & r \geq 2 . \end{cases}$$

On vérifie facilement que la fonction f est continue en tout point $t \in I-D$, discontinue on tout point $t \in D$, osc $f(t) \geq 2^{1-n}$ lorsque $t \in D_n$ et que $3/2 \leq f(t) \leq 2$ pour $t \in I$. Soit, maintenant,

$$(13) \qquad f_n(t) := \min \{ f(z) + n.|z-t| : 0 \leq z \leq 1 \} , \ n = 1,2,\dots$$

On vérfiera aisément[x)] que la suite f_n est croissante,

$$3/2 \leq f_1/t/ \leq f_2/t/ \leq \dots \leq f_n/t/ \leq \dots \leq f/t/ \leq 2, \ t \in I$$

---

x) cp., p.e. B. Szokefalvi-Nagy: Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansions, p. 69

et que $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$. Toutes les fonctions f_n sont continues, car

(14) $|f_n(t) - f_n(z)| \leq n \cdot |t - z|$

quel que soient $t, z \in I$. Celà étant, formons des fonctions

$g_n : I \to R$:

(15) $I \ni t \longrightarrow g_1(t) := \text{sqrt } f_1(t) := \sqrt{f_1(t)}$

$I \ni t \longrightarrow g_n(t) := \text{sqrt } (f_n(t) - f_{n-1}(t)),\ n=2,3,\ldots$

et remarquens que

(16) $\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2(t) = \lim_{n \to \infty} [g_1^2(t) + \ldots + g_n^2(t)] = \lim_{n \to \infty} f_n(t) =$
$= f(t)$

Il en découle immediatement, que la fonction vectorielle

(17) $I \ni t \to G_D(t) := (g_1(t), \ldots, g_2(t), \ldots, g_n(t), \ldots) \in l_2$

est bien définie. Les fonctions réelles g_n étant continues, notre fonction $G_D : I \to l_2$ est faiblement continue par rapport a E_o (9) .

Pour vérifier que G_D est discontinue en chaque point $t \in D$ observons que:

(18) $|\|G_D(t)\| - \|G_D(z)\|| \leq \|G_D(t) - G_D(z)\| \leq \|G_D(t)\| + \|G_D(z)\|$

et par consequent il existe un nombre $\eta > 0$ tel, qu' on peut faire correspondre a tout $\delta > 0$ un point $y \in I$ verfiant:

(19) $\|G_D(t) - G_D(y)\| \geq \text{sqrt} \langle G_D(t) | G_D(t)\rangle - \text{sqrt} \langle G_D(y) | G_D(y)\rangle =$

$= |\text{sqrt } f(t) - \text{sqrt } f(y)| = \dfrac{f(t) - f(y)}{\text{sqrt } f(t) + \text{sqrt } f(y)} \geq$

$\geq 4^{-1} |f(t) - f(y)| \geq \eta$

malgre que $|t - y| < \delta$, ce qui termine la démonstration.

Le nombre η est d'ailleurs aisé à calculer.

QUESTION 1. Il reste a savoir si G_D est continue pour la topologie forte de l_2 en chaque point du complémentaire $I-D$

de l'ensemble D.

PROPOSITION 3. Il existe une fonction $G: I \to l_2$ faiblement continue par rapport à E_o (9) et n'étant pas connexe. De plus l'image $G(J)$ n'est pas connexe quel que soit l'intervalle connexe $J \subset I$ dont la puisance card $J = c$ est infinies (c'est-à-dire J n'est pas dégénéré).

DÉMONSTRATION: Soit Q l'ensemble des nombres rationnels. Posons $D := Q \cap I$ et remarquons que D est due type F_σ et de première catégorie. Alors on peut former une fonction vectorielle $G := G_D : I \to l_2$ comme dans la démonstration du theoreme 2, par la formule (17).

Prenons l'intervalle non-dégénéré $J \subset I$ et supposons au contraire que l'image $G_D(J)$ est (fortement) connexe dans l_2. La fonction:

(20) $\quad l_2 \ni s \longrightarrow H(s) := \|s\|^2 \in R$

étant continue (par rapport à la topologie forte dans l_2), l'ensemble $(H \circ G_D)(J)$ doit être aussi connexe dans R. Mais $(H \circ G_D)(J) \subset \{2 - 2^{-n} : n=1,2,\ldots\} \cup \{2\}$ est dénombrable et a une nombre infinie d'élements. Cependant dans R seulement des ensembles convexes sont connexes. Cette contradiotion termine la démonstration.

Évidement l'onsemble $G_D(J)$ est connexe dans la topologie faible de l_2.

QUESTION 2 (Z. Grande) Soit $G: I \to l_2$ une fonction faiblement continue par rapport à (9) telle, que la famille $\{g_n := e_n^* \circ G : n=1,2,\ldots\}$ est équicontinue, c'est-à-dire:

(21) $$\bigwedge_{z \in I} \ \bigwedge_{\varepsilon > 0} \ \bigvee_{\delta > 0} \ \bigwedge_{t \in I} \ \bigwedge_{n \in N} \ |t-z| < \delta \Longrightarrow |g_n(t) - g_n(z)| < \varepsilon.$$

Alors G est- elle connexe ?

QUESTION 3. Soit $D \subset I$ un ensemble maigre du type F_σ. Existe- t-il une application $G:I \to l_2$ faiblement continue telle que l'ensemble D_G des points de discontinuité forte (3) est égale à D, $D=D_G$? Soit d'ailleurs $Z \subset I$ un ensemble mesurable de mesure nulle, mes $Z = 0$. Alors Z est un F_σ de premiere catégorie par rapport à la topologie de Denjoy ([23],[11],[15],[24],[6],[7]). Existe - t - il une applicat-ion $G: I \to l_2$ faiblement approximativement continue [8], dont l'ensemble D_G^a de tous les points de discontinuité approximative forte [9] est exactement égal à Z, $Z= D_G^a$? On peut aussi poser la même question concernante la topologie de Wilczyński [25] dans le cas, ou Z est un ensemble maigre arbitraire.

Une fonction $G: I \to l_2$ est dite (fortement) quasicontinue au point $t \in I$ lorsque, quel que soit l'entourage ouvert U du point $G(t) \in l_2$ et l'entourage ouvert V du point $t \in I$, on a:

(22) $\mathrm{int}_I\ G^{-1}(U) \cap V \neq \emptyset$ (voir [16])

Évidement si $G:I \to l_2$ est fortement continue, elle est de même quasi-continue. Dans le cas de la continuite faible la situation est tout différent:

PROPOSITION 4: Il existe une fonction $G: I \to l_2$ faiblement continue par rapport à E_0 qui n'ost pas quasicontinue.

DEMONSTRATION: Soit G_D une fonction la même que dans la preuve du proposition 3, (17). Pour $t = t_n \in Q \cap I = \{t_1, t_2, \dots\}$ nous avons $\|G_D(t)\|=$ sqrt $f(t)=$ sqrt $(2 - 2^{-n})$. Posons:

(23) $U := K(G_D(t_n), 2^{-n-5}) = \{p \in l_2; \|p - G_D(t_n)\| < 2^{-n-5}\}$

et observons que $G_D^{-1}(U) = \{t_n\}$. Alors l'interieur int $G_D^{-1}(U)$ est vide et l'inéqualité (22) est imposible. La démonstration est donc achevée.

D'autre part chaque fonction $G:I \to l_2$ faiblement continue par rapport à E_o est deja "cliquish" [16] , car elle appartient à la premiere classe de Baire (dans la topologie forte) et ainsi est punctuellement discontinue. Rappelons, que la fonction $G:I \to l_2$ est dit "cliquish" lorsqu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et pour tout ensemble ouvert $U \neq \emptyset$ un ensemble ouvert $V \subset U$ non- vide tel que

$\|G(t) - G(z)\| < \varepsilon$ pour tous les points $t,z \in V$.

Soit $V = C_o(I, (l_2, \tau(E_o)))$ un espace de totes les applications bornées et faiblement continues, muni de la norme uniforme:

(24) $|||G||| := \sup \{\|G(t)\| : t \in T=I\}$

L'ensemble de points de discontinuité forte étant en conformité avec la proposition 1, du type F_σ dans I est a plus forte raison mesurable selon Lebesque. Désignons par W un sous--ensemble de V composé des applications $G: I \to l_2$ dont l'ensemble D_G de toutes les points de discontinuité est de mesure plaine:

(25) $W := \{G \in V \subset B(I, l_2): \text{mes}(D_G) = 1\}$.

PROPOSITION 5. L'enemble W de la forme (25) est un sous--ensemble résiduel du type G_δ dans V.

REMARQUE 1: On a déjà des résultats de ce type, mais concernant les autres familles des fonctions réelles (voir [13],[2],[3]) DÉMONSTRATION: Soit L l'ensemble des nombres de Liouville et $Z := I - L$. Il est bien connue, que Z est du type F_σ de première catégorie et de mesure pleine ([17], p. 8-10). Remarquons tout d'abord que G_Z définie par la formule (17) doit appartenir à l'ensemble (25) car $D_{G_Z} \supset Z$. En effet, notre espace V vérifie la propriété (P) de [13] :

$$(26)\quad P(V) \Longleftrightarrow \bigwedge_{m<1} V(m) := \{G \in V:\ mes(D_G) > m\} \neq \emptyset .$$

Prenons en evidence, que:

$$(27)\quad W = \bigcap_{n=1}^{\infty} V\left(\frac{n}{n+1}\right) .$$

D'une manière similaire comme dans [13] on peut se convaincre de fait, que chaque ensemble $V(m)$ est ouvert et dense dans V pour $0 \leq m < 1$. Il ne faut que remplacer dans les preuves de lemme 1 et 2 de [13] la valeur absolue $|\cdot|$ par la norme $\|\cdot\|$ et redéfinir l'oscillation w_G d'une maniere habituelle:

$$(28)\quad w_G(a) := \inf_{U \ni a} \sup \{\|G(b) - G(c)\|:\ b, c \in U \subset T\}$$

ou U doit parcourir la famille des entourages ouvertes de point $a \in T$. Alors W conformement à (27) est un enseble résiduel et du type G_δ dans $(V, |||\cdot|||)$.

Démontrons encore deux theorems semblables aux theorems 9-11 de l'article [8] mais concernant des derivées faibles. On dit qu' une fonction vectorielle $G: I \longrightarrow l_2$ est une derivée faible par rapport à E_0 si $e_n^* \circ G : I \longrightarrow R$ est une dérivée (évidement unilatéralle en 0 et 1) pour $n = 1, 2, \ldots$.

PROPOSITION 6. Si $G: I\times I\times I \longrightarrow l_2$ est une fonction bornée dont toutes les sections $G_{yz}, G_{xz}, G_{xy}: I \longrightarrow l_2$ sont des derivées faibles par rapport à E_0, alors elle est de quatrièmme classe de Baire.

DÉMONSTRATION: Étant fixé la fonctionnelle $e_n^* \in E_o$, la fonction $e_n^* \circ G$ est de troisième classe de Baire d'après mon theoreme du travail [21] . Par consequent, d'après le theoreme 3 de [1] , la fonction G est de quatrième classe de Baire forte.

PROPOSITION 7. Soit $G: I \times I \times I \to l_2$ une fonction bornée telle que ses sections G_{yz} et G_{xz}, $x,y,z \in I$, sont faiblement continues et les sections G_{xy} sont des dérivées faibles par rapport à E_o. Dans ces hypothèses G est de troisième classe de Baire (forte).

DÉMONSTRATION: Étant fixé $e_n^* \in E_o$ considerons la fonction $e_n^* \circ G$. Posons:

(29) $$g(x,y,z) := \int_0^z (e_n^* \circ G)(x,y,t) \; dt$$

et remarquons que g_{yz}, g_{xz} et g_{xy} sont continues. De plus les sections g_{xy} sont croissantes, ce qui entraîne la continuité des toutes les sections $g_x: I \times I \to R$. Alors g est de première classe de Baire.

En se servant du fait, que:

(30) $$(e_n^* \circ G)(x,y,z) = \lim_{n_o \to \infty} \{[g(x,y\ ,\ z+1/n_o\ ) - g\ (x,y,z)] \cdot n_o\},$$

$z \in [0,\ 1 - 1/n_o]$,

on voit facilement que $e_n^* \circ G$ est de deuxième classe de Baire. Il en découle d'après le theoreme 3 du travail [1] que G est de troisième classe de Baire, ce que était à montrer.

PROPOSITION 8. Soit C un idéal propre des parties de I de première catégorie. Une application $G: I \times I \to l_2$ dont toutes les sections G_x, $x \in I$ sont faiblement C-approximativement continue dans le sense de [25] et toutes les sections G^y,

$y \in I$ ont la propriete de Baire faible (voir [8]), vérifie la propriete de Baire forte comme une fonction de deux variables.

DÉMONSTRATION: Toutes les fonctions $g^n := e_n^* \circ G : I\times I \longrightarrow R$, $n=1,2,\dots$ sont C-approximativement continues par rapport à y et ont la propriété de Baire par rapport à une variable x. Il est manifeste, qu'une fonction $g_x^n : I \longrightarrow R$ C-approximativement continue n'est de même B-dégénérée au sense de [22] en aucun point. Alors en se servant de theoreme 1 de [22] on voit sans peine, que g^n possede la propriété de Baire sur l'espace produit $I\times I$. Alors G vérifie la propriete de Baire faible par rapport à E_o. Mais d'apres le theoreme 4 de [8] elle a la propriété forte de Baire, ce qui achéve la démonstration.

Voilà un autre théorème concernant la propriété de Baire des fonctions vectorielles de deux variables:

PROPOSITION 9. Soit $F: I\times I \longrightarrow l_2$ une application telle que tous ses sections $F_x = F(x,\cdot) \in C(I,l_2)$ sont continues pour $x\in I$ et les sections $F^y = F(\cdot,y)$ ont la propriété de Baire. Alors il existe un ensemble Z résiduel dans I tel, que la restriction $F | Z\times I$ est continue comme la fonction de deux variables.

DÉMONSTRATION: On pose:

(31) $I \ni x \longrightarrow g(x) := F_x \in C(I, l_2)$.

Nous allons montrer que la fonction (31) vérifie la propriété de Baire. Prenons une fonction arbitraire $h\in C(I,l_2)$. Soit $\bar{K}(h,r)$ une boule formée dans $C(I, l_2)$, de centre $h\in C(I, l_2)$ et de rayon $r>0$. On voit que (cp. (24))

(32) $g^{-1}(\bar{K}(h, r)) := \{x \in I: g(x) \in \bar{K}(h,r)\} = \{x \in I: \sup_{y \in I} \| g(x)(y)-$
$-h(y) \| \leq r\} = I - \{x \in I: \bigvee_{y \in I} \| F(x,y) - h(y) \| > r\} =$
$= I - pr_1 \{(x,y) \in IxI: \| F(x,y) - h(y) \| > r\} =$
$= I - pr_1\ k^{-1}((r, +\infty))$

ou $k: IxI \to R$ est définie par la formule:

(33) $I^2 \ni (x,y) \mapsto k(x,y) := \| F(x,y) - h(y) \| \in R$.

et pr_1 est une projection sur la première axe:

(34) $I^2 \supset A \mapsto pr_1 A := \{x \in I: \bigvee_{y \in I} (x,y) \in A\} \subset I$.

Soit M une tribu des parties de I ayantes la propriété de Baire et B une tribu Borelienne. La fonction k de (33) dont toutes les sections k_x sont continues et k^y ont la propriété de Baire est $M \otimes B$ - mesurable [14] . En effet, on peut remarquer que $k(x,y) = \lim_{n \to \infty} k_n(x,y)$ ou

(35) $$k_n(x,y) := \begin{cases} k(x, \frac{k-1}{n}) & \text{pour } y \in [\frac{k-1}{n}, k/n), k=1,2,\dots \\ k(x,1) & \text{pour } y=1 \end{cases}$$

Alors tenant compte (32) on voit que $g^{-1}(\bar{K}(h,r)) \in M$, car la projection pr_1 d'un ensemble appartenent à $M \otimes B$ est un élément d'une tribu M (voir [4] , th. 1.5). En raison du fait, que

(36) $K(h,r) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{K}(h, r-2^{-n})$, cp. [4] , on a :

(37) $g^{-1}(K(h,r)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(\bar{K}(h, r-2^{-n})) \in M$.

Comme $C(I, l_2)$ est séparable, donc g vérifie la propriété de Baire et par consequent il existe l'ensemble residuel $Z \subset I$ tel que $g|Z: Z \to l_2$ etait continue. En effet, une fonction

(38) $Z \times I \ni (x,y) \mapsto g(x)(y) = F(x,y) \in l_2$

est continue sur ZxI en tenant compte de la equicontinuité de leur sections F^y et continuité de toutes les sections F_x pour $x \in Z$. Par ailleurs on obtient ainsi la continuité de la restriction $F|Z \times I$, d'ou notre assertion. L'auteur est très reconnaissant à prof. W. Wilczyński de ses remarques critiques rendant possible améliorer cet article.

OUVRAGES CITÉS.

[1] Alexiewicz A., Orlicz W., Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites, Fund. Math., 35 (1943), 105-126

[2] Bruckner A.M., Petruska Gy., Some typical results on bounded Baire one functions, Acta Math. Hung. 43 (1984), 325-333

[3] Ceder J, Petruska Gy., Most Darbous Baire 1 functions map big sets onto small sets, Acta Math. Hung. 41 (1983), 37-46

[4] Christensen J.P.R., Topology and Borel structure, North Holland, Amsterdam 1974

[5] Gelfand I., Abstrakte Functionen und lineare Operatoren, Recueil Math. 4, 46 (1938), 235-286

[6] Goffman C., Neugebauer C., Nishiura T., Density topology and approximate continuity, Duke Math. J., 28 (1961), 497-505

[7] Goffman C., Waterman D., Approximately continuous transformations, Proc. AMS 12 (1961), 116-121

[8] Grande Z., Sur la continuité approximative faible, Problemy Matematyczne 4 (1984), 11-18

[9] Grande Z., Topolowska M., Sur les fonctions vectorielles approximativement continues, Časopis pro Pest. Mat. 107,

4 (1982), 333-340

[10] Grande Z., Sur la measurabilite des fonctions de plusieurs variables, Mat. Slovaca 28 (1978), 113-118

[11] Haupt O., Pauc Ch., La topologie de Denjoy envisagée comme vraie topologie, C.R. Acad. Sci. Paris, 234 (1952), 390-392

[12] Kelley J.L., Namioka I., Linear topological spaces, D. van Nostrand, Princeton, N.Y. 1963

[13] Kostyrko P., Salat T., On the structure of some function space, Real Analysis Exchange, vol. 10 no 1 (1984-85), 188-193

[14] Marczewski E., Ryll-Nardzewski Cz., Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables, Annales Soc. Polon. Math. 25 (1953), 145-154

[15] Martin N.F.G., A topology for certain measure spaces, Trans. AMS, 112 (1964), 1-18

[16] Neubrunnova A., On certain generalizations of the notion of continuity, Mat. Casopis 23, 404 (1973), 374-380

[17] J.C. Oxtoby, Mass und Kategorie, Springer-Verlag, Berlin--Heidelberg N.Y. , 1971

[18] W. Rudin, Functional Analysis, Mc Graw-Hill, N.Y. 1973

[19] Sierpiński W., Sur une propriete des ensembles F-sigma linéaires, Fund. Math. 14 (1929), 216-220

[20] Ślęzak W.A., Une condition équivalente a la mesurabilité d'une fonction de deux variables, Problemy Mat., 3 (1982), 37-49

[21] Ślęzak W., Sur les conditions équivalentes à la mesurabi-

lité des fonctions de plusieurs variables (en russe), Problemy Mat. 3 (1082), 65-70

[22] Ślęzak W., La propriote de Baire des fonctions de deux variables, Problemy Matematyczne 4 (1984), 5-10

[23] Tall F.D., The density topology, Pacific J. Math. 62,no 1 (1976), 275-284

[24] Troyer R.S., Ziemer W.P., Topologies generated by outer measures, J. Math. Mech. 12 (1963), 485-494

[25] Wilczyński W., A category analogue of the density topology, approximate continuity and the approximative derivative, Real Analysis Exchange, vol. 10, no 2 (1984-85), 241-265

W SPRAWIE SŁABEJ CIĄGŁOŚCI

Streszczenie

W artykule podano rozwiązanie problemu opublikowanego przez Z. Grandego w [8] dotyczącego funkcji słabo aproksymatywnie ciągłych. Przy okazji pokazano, że w zbiorze funkcji wektorowych o wartościach w przestrzeni l_2, których współrzędne są funkcjami ciągłymi, posiadanie pełnej miary zbioru punktów silnej nieciągłości jest zjawiskiem typowym (w sensie kategorii). Przytoczono kilka prostych wniosków dotyczących przynależności do poszczególnych klas Baire'a funkcji wektorowych trzech zmiennych i własności Baire'a funkcji dwóch zmiennych o wartościach w l_2.
Praca zawiera też kilka otwartych pytań dotyczących charakteryzacji zbioru punktów silnej ciągłości dla słabo ciągłych funkcji wektorowych ze względu na różne topologie, gdyż stwierdzenia 1 i 2 nie w pełni rozstrzygają zagadnienie charakteryzacji.