ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ w BYDGOSZCZY

Problemy Matematyczne 1986 z. 8

WŁODZIMIERZ ŚLĘZAK

WSP w Bydgoszczy

SUR DEUX PROBLÈMES DE Z. GRANDE

Dans tout ce qui va suivre, nous désignerons par R la droite réelle et par R^2 l'espace produit $R \times R$. Étant donnés une fonction $f: R^2 \to R$ et $x \in R$ et $y \in R$ fixés, les fonctions d'une variable $v \mapsto f_x(v) = f(x,v)$ et $u \mapsto f^y(u) = f(u,y)$ s'appellent sections de la fonction f correspondant respectivements à x et y.

Dans les travaux mathématiques on trouve de nombreuses conditions relatives aux sections f_x et f^y, qui impliquent l'appartenance de la fonction f à une certaine classe de Baire (voir [1] - [4],[6]-[9]). En particular on sait que toute fonction $f: R^2 \to R$ dont toutes les sections f_x sont continues à droite et toutes les sections f^y sont de première classe de Baire est de 2^{me} classe de Baire [9] et qu'il existe une fonction $f: R^2 \to R$ dont toutes les sections f_x sont continues et toutes les sections f^y sont de première classe de Baire et ont la propriete de Darboux et qui n'est pas de première classe de Baire [2]. On sait aussi que toute fonction $f: R^2 \to R$ dont toutes les sections f_x sont continues et toutes les sections f^y sont continues et monotones (croissantes ou décroissantes) est continue et qu'il existe une fonction $f: R^2 \to R$ non-borélienne et telle que toutes ses sections f_x et f^y sont croissantes [9] . D'autre part la monotonie des sections f_x et la mesurabilité (selon Lebesgue) des sections f^y entraîn la mesurabilité de la fonction f [10] . Dans [3] Z. Grande avait posé-entre autres-les trois problèmes suivants:

I. Existe-t-il une fonction $f:R^2 \to R$ dont toutes les sections f_x sont continues et toutes les sections f^y sont croissantes et qui n'est pas de premiere classe de Baire ?

II. Existe-t-il une fonction $f: R^2 \to R$ dont toutes les sections f_x sont continues à droite et toutes les sections f^y sont croissantes et qui n'est pas de premiere classe de Baire ?

III. Existe-t-il une fonction $f: R^2 \to R$ dont toutes les sections f_x sont continues et toutes les sections f^y sont monotones et qui n'est pas de première classe de Baire ?

La solution négative du problème I a été donnée récemment par S. Plaskacz, mais sa démonstration est plutôt compliquée. Le travail présent donne une réponse affirmative au problème II et une réponse négative au problème III.

THÉORÈME 1. Si toutes les sections f_x d'une fonction $f: R^2 \to R$ sont continues et toutes les sections f^y sont monotones, alors la fonction f est de première classe de Baire

Démonstration: Sans restreindre le généralité , on peut supposer que la fonction f est définie sur un carré $I^2 := [0,1] \times [0,1]$, car

$$R^2 = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} [k,k+1] \times [m,m+1] .$$

Posons $g(x) := f(x, \cdot\,) \in C(I, R)$. Nous allons premièrement montrer, que l'application g d'un segment I dans un espace de Banach $C(I, R)$ des applications continues de I dans R pour la convergence uniforme, est aussi de première classe de Baire. L'espace $C(I,R)$ étant séparable, tout l'ensemble ouvert U de $C(I, R)$ est l'union d'une famille dénombrable des boules ouvertes. D'autre part chaque boule ouverte $K(h,r)$ est l'union d'une famille dénombrable des boules fermées $\bar{K}(h, r-2^{-n})$, $n=1,2,\ldots$. Allors il suffit de prouver, que des images réciproques $g^{-1}(\bar{K}(h,r))$ sont du type F_σ.

Effectivement, nous avons

$g^{-1}(\bar{K}(h,r)) = \{x : \| g(x) - h \| \le r\} = \{x : | f(x,y) - h(y) | \le r$ pour tout $y \in I\} = \bigcap_{y \in I} (f^y)^{-1}(\{z : | h(y) - z | \le r\})$.

Les ensembles $[h(y)-r\,;\,h(y)+r]$ étant connexes et les sections f^y étant monotones, les ensembles $(f^y)^{-1}([h(y) - r\,;\,h(y) + r])$ sont aussi connexes. Il découle de ces raisonnements que $g^{-1}(\bar{K}(h,r))$ est également connexe comme l'intersection d'une famille des ensembles convexes. Car tout sous-ensemble connexe de la droite réelle R est un intervalle et car chaque intervalle est du type G_δ et F_σ à la fois, on voit que $g^{-1}(U)$ est du type F_σ pour tout ouvert U de $C(I,R)$.

Par conséquent g est de première classe de Baire. Actuellement nous pouvons compléter notre démonstration en appliquant la même méthode, que dans la démonstration du théorème 6 de l'article [4], Notamment il suffit de démontrer qu'il existe pour tout nombre $n = 1,2,\ldots$ une fonction $h_n : I^2 \longrightarrow R$ de première classe de Baire et telle que

$$|f(x,y) - h_n(x,y)| \leq 2^{-n} \qquad \text{pour tout point } (x,y) \in I^2 .$$

Fixons l'indice naturel n et soit $\widetilde{B}$ une base dénombrable d'intervalles ouverts dans I. L'application g étant continue en un certain point x_1, il existe un intervalle $J_1 \in \widetilde{B}$ tel que $\| g(x) - g(x_1)\| \leq 2^{-n-1}$ pour $x_1 \in J_1^n$, c'est-à-dire que $|f(x,y) - f(x_1,y)| \leq 2^{-n-1}$ pour tout $y \in I$ et $x \in J_1^n$.

Fixons le nombre naturel $k > 1$ et supposons que, quel que soit le nombre $m < k$ il existe un intervalle $J_m^n \in \widetilde{B}$ tel que

$$\mathrm{diam}(f^y * [J_m^n - (J_1^n \cup J_2^n \cup \ldots \cup J_{m-1}^n)]) < 2^{-n} \text{ pour tout } y \in I .$$

Il existe un point $x_k \in I - (J_1^n \cup \ldots \cup J_{k-1}^n)$ auquel la restriction $g \mid (I - (J_1^n \cup \ldots \cup J_{k-1}^n))$ est continue, car g est une application de première classe de Baire d'un espace polonais dans une autre. Par conséquent il existe un intervalle ouvert $J_k^n \in \widetilde{B}$, tel que $x_k \in J_k^n$ et

$$\mathrm{diam}(f^y * [J_k^n - (J_1^n \cup \ldots \cup J_{k-1}^n)]) \leq 2^{-n} \text{ pour tout } y \in I .$$

Fixons le point $t_s \in J_s^n - (J_1^n \cup \ldots \cup J_{s-1}^n)$ dans chacun des ensembles $J_s^n - (J_1^n \cup \ldots \cup J_{s-1}^n)$; $s = 2,3,\ldots$.

Celà étant, formons des fonctions

$$h_n(x,y) := g(t_s)(y) = f(t_s,y) \text{ lorsque } x \in J_s^n - \bigcup_{k=1}^{s-1} J_k^n$$

et remarquons que, quel que soit le point $(x,y) \in I^2$, on a

$$|f(x,y) - h_n(x,y)| = |f(x,y) - f(t_s,y)| \leq 2^{-n}$$

puisque x et t_s appartient à l'ensemble commun $J_s^n - (J_1^n \cup \ldots \cup J_{s-1}^n)$ et $\mathrm{diam}(f^y * [J_s^n - (J_1^n \cup \ldots \cup J_{s-1}^n)]) \leq 2^{-n}$.

Reste à prouver que la fonction h_n est de premiere classe de Baire. Dans ce but il suffit de remarquer que, quel que soit un ouvert G, on a

$$h_n^{-1}(G) = \{(x,y) : h_n(x,y) \in G\} = \bigcup_{s=1}^{\infty} [J_s^n - (J_1^n \cup \dots \cup J_{s-1}^n)] \times$$
$$\times \{y : f(t_s, y) \in G\} \in F_\sigma(I^2)$$

Donc $f = \lim_{n \to \infty} h_n$ est de première classe de Baire.

REMARQUE 1. On voit sans peine qu'on peut généraliser le théorème susdit (en appliquant les mêmes méthodes)au cas où la fonction f prenant ses valeurs dans un espace separable de Banach Z sera définie sur le produit cartésien $X\times Y$ de deux espaces métriques compacts, dans le première d'eux tous les ensembles connexes seraient du type F_σ.

Le cercle S^1 est un example de tel espace X sans aucun ordre compatible à la topologie. La monotonie des sections f^y signifiera évidemment que $(f^y)^{-1}(C)$ soit connexe dans X pour tout connexe C dans Z (voir [5])

De plus, en vertu des théorèmes 1 et 2 de [1] , nous obtiendrons:

CORROLLAIRE 1. Soit Y un espace polonais et Z un espace de Banach. Si la fonction $f : R\times Y \to Z$ dont le contredomaine est separable, a toutes ses sections f_x faiblement continues ot toutes ses sections f^y monotones, alors la fonction f est de première classe faible ce qui entraîne qu'elle est de deuxiéme classe habituelle.

On peut s'efforcer d'affaiblir les conditions concernantes f^y dans notre théoreme 1 en supposant que f^y est à variation bornée ou même la limite uniforme d'un suite de fonctions n'ayantes que le nombre fini des discontinuites. De suite, nous ne savons pas, peut-on remplacer la continuité des sections f_x par la continuité approximative ou même par l'hypothèse que toutes les sections f_x sont des dérivées. On sait que toute fonction $f: R^2 \to R$ dont toutes les sections f_x sont approximativement continues et toutes les sections f^y sont de première classe de Baire est de deuxieme classe de Baire et qu'il existe une fonction $f: R^2 \to R$ dont toutes les sections f_x sont continues, toutes les sections f^y sont des dérivées et qui n'est pas de première classe de Baire ([6], cf. [3], problème 2, p. 13).

THÉORÈME 2. Il existe une fonction $h: I^2 \to I$ n'est pas de première classe de Baire, dont toutes les sections h_x sont continues à gauche et croissantes, cependant que toutes les sections h^y sont décroissantes.

Démonstration : Soit

$$C = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{2k=0}^{3^m-1} \left[2k\, 3^{-m} ; (2k+1)\cdot 3^{-m}\right] = I - \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n;b_n)$$

l'ensemble triadique de Cantor. L'ensemble ouvert I-C est l'union de ses composantes $(a_n;b_n)$ ou $a_n < b_n$ pour $n=1,2,\ldots$. Prenons en considération les triangles $T_0 := \operatorname{conv}\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$ et $T_n := \operatorname{conv}\{(a_n,a_n),(b_n,a_n),(b_n,b_n)\}$ pour $n=1,2,\ldots$. Celà étant, formons la fonction :

$$h(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y-a_n}{b_n-a_n} \text{ lorsque } (x,y)\in T_n;\ n=1,2,\ldots \\ 0, \text{ lorsque } (x,y)\in T_0 - \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \\ 1, \text{ lorsque } (x,y)\in I^2 - T_0 \end{cases}$$

Observons que $\lim_{t\to y^-} h(x,t) = h(x,y)$ et que $u \leq v$ entraîne $h(x,v) \geqslant h(x,u)$ et $f(u,y) \geqslant f(v,y)$ quels que soient des nombres x et y. Pour achever l'argumentation que h n'est pas de première classe de Baire il suffit, d'après le théoreme célèbre de Baire, d'indiquer un ensemble parfait $P \subset I^2$ tel que la restriction $h_P := h \mid P$ de h à P ne posséde aucun point de continuité . Posons $P = \{(t,t): t \in C\}$. On voit facilement que les fibres $h_P^{-1}(1) = \{(b_n,b_n): n=1,2,\ldots\}$ et $h_P^{-1}(0) \supset \{(a_n,a_n); n=1,2,\ldots\}$ sont tous les deux denses en P. Alors $\operatorname{osc} h_P(t,t) = 1$ pour tout $t \in C$, et la démonstration est achevée.

REMARQUE 2. Il est manifeste que la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} -1, & \text{lorsque } \operatorname{ent} x < \operatorname{ent} y \\ 0, & \text{lorsque } \operatorname{ent} x > \operatorname{ent} y \\ -h(x-k,\ y-k) & \text{lorsque } \operatorname{ent} x = \operatorname{ent} y = k \\ & k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

est bien définie sur tout le plan R^2 et qu'elle satisfait à toutes les exigeances du Problème II.

En terminant, nous nous devons de remercier trés vivement le Professeur Z. Grande, pour ses précieux conseils et nombreuses suggestions, dans la réalisation de la présente contribution.

TRAVAUX CITÉS

[1] Alexiewicz A., Orlicz W., Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites, Fundamenta Math. XXXV (1948), 105-126

[2] Grande Z., Quelques remarques sur les classes de Baire des fonctions de deux variables, Math. Slovaca 26 (1976), 241-246

[3] Grande Z., Les problèmes concernant les fonctions réelles. Zeszyty Naukowe WSP w Bydgoszczy, Problemy Matematyczne 3 (1982), 11-27

[4] Grande Z., Sur les classes de Baire des fonctions de deux variables, Fundamenta Math. CXV (1983), 119-125

[5] Kuratowski K., Topologie II, PWN, Warszawa 1958

[6] Laczkovich M., Petruska Gy., Sectiowise properties and measurability of functions of two variables, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 40, 1-2 (1982), 169-178

[7] Laczkovich, On the Baire class of functions of two variables, to appear in Fundam. Math.

[8] Louveau A., Sur les fonctions boréliennes de plusieurs variables, C.R. Acad.Sci. Paris, 285 (1977), Séria A, 1037-1039

[9] Marczewski E., Ryll-Nardzewski Cz., Sur la measurabilité des fonctions de plusieurs variables, Annal. Soc. Polon. Math., 25 (1953), 145-154

[10] Ursell H.D., Some methods of proving measurability, Fundamenta Math. XXXII (1939), 311-320

[11] Whyburn G.T., Non-alternating transformations, Amer. Journ. of Math., 56 (1934), 294-302

O DWÓCH PROBLEMACH GRANDEGO

Streszczenie

W artykule pokazano, że funkcja rzeczywista dwóch zmiennych, której jedne cięcia są ciągłe, a drugie monotoniczne musi należeć do pierwszej klasy Baire´a i podano przykład na to, że w powyższym twierdzeniu nie można zastąpić ciągłości przez ciągłość prawostronną. W ten sposób udzielono odpowiedzi na pewne pytania opublikowane przez Z. Grandego w [3]. Zastosowane metody dają się łatwo użyć w przypadku odwzorowań o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha, przy czym monotoniczność należy wtedy rozumieć w sensie Whyburna [11].