ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1983/84 z.5/6

NORBERT ROBY
Université de Montpellier II

SUR UN FONCTEUR LIÉ AUX PUISSANCES DIVISÉES DE DEGRÉ 3

Sommaire:

Soit M un module unitaire sur un anneau commutatif unitaire A. Soit $\Gamma_3(M)$ la composante homogène de degré 3 de l'algèbre des puissances divisées $\Gamma(M)$. Dans [I], A. Prószyński a défini le sous-module $\overline{\Gamma_3(M)}$ de $\Gamma_3(M)$, qui est engendré par les éléments $x^{[3]}$ $(x \in M)$, et le module quotient $\tilde{\Gamma}_3(M) = \Gamma_3(M)/\overline{\Gamma_3(M)}$. On se propose ici d'expliciter $\tilde{\Gamma}_3(M)$ quand M est un produit fini de modules monogènes.

Un certain nombre de définitions viennent d'être données dans le sommaire ci-dessus; nous ne les reprendrons pas.

Notation : L' anneau A étant donné, nous désignons par $\underline{b}$ l'idéal de A engendré par les élements du type a^2-a $(a \in A)$; (notons en passant que l'application canonique $A \to A/\underline{b}$ résoud le problème universel posé par les homomorphismes A dans les anneaux de Boole, mais nous n'utiliserons pas ce fait).

Nous nous proposons de démontrer ici le

THEOREME 1: *Soit $\{I_1, \dots, I_n\}$ $(n \geq 0)$ une famille finie d'ideaux de A.*

Soit le module produit $M = A/I_1 \times \dots \times A/I_n$.

Alors on a :

$$\tilde{\Gamma}_3(M) \simeq \prod_{1 \leq p < q \leq n} A/(I_p + I_q + \underline{b}).$$

Voici quelques consequences de ce théorème:

Si $I_1 = \dots = I_n = 0$, on obtient le

Corollaire 1: *Pour tout anneau A et tout entier $n \geq 1$, on a:*

$$\tilde{\Gamma}_3(A^n) \simeq (A/\underline{b})^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Cette formule explicite la structure de $\tilde{\Gamma}_3(M)$ quand M est libre de type fini.

<u>Corollaire 2</u> : <u>Il est possible d'expliciter</u> $\tilde{\Gamma}_3(M)$ <u>pour tout module de type fini sur un anneau pimcipal.</u>

Car un tel module est un produit fini de modules monogènes.

Nous démontrons aussi le

<u>THEOREME II</u> : <u>Pour tout module</u> M <u>et tout idéal</u> I <u>de</u> A, <u>on a</u> :

$$\tilde{\Gamma}_3(M \times A/I) \simeq \tilde{\Gamma}_3(M) \oplus M/(I+\underline{b})M.$$

Pour l'instant, nous prouvons d'abord que le théorème I est une conséquence du théorème II.

Raisonnons par recurrence sur n et posons $A/I_1 \times \ldots \times A/I_n = M_n$.

Le théorème 1 est vrai pour $n = 0$ (car $\tilde{\Gamma}_3(0) = 0$).
Supposons $n \geq 1$. On a, d'après le théorème II :

$$\tilde{\Gamma}_3(M_n) = \tilde{\Gamma}_3(M_{n-1}) \times M_{n-1}/(I_n+\underline{b})M_{n-1}.$$

Or: $M_{n-1}/(I_n+\underline{b})M_{n-1} \simeq M_{n-1} \otimes A/(I_n+\underline{b})$

$$\simeq \prod_{1 \leq p \leq n-1} [A/I_p \otimes A/(I_n+\underline{b})]$$

$$\simeq \prod_{1 \leq p < n} A/(I_p + I_n + \underline{b}).$$

La démonstration par récurrence du théorème 1 est alors immédiate.

La démonstration du théorème II sera obtenue à la suite d'un certain nombre de lemmes.

<u>Lemme 1</u> : <u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>des</u> <u>A-modules</u>.

<u>Soit</u> $K(M,N)$ <u>le sous-module de</u>

$[\Gamma_2(M) \otimes N] \oplus [M \otimes \Gamma_2(N)]$ engendré par les éléments de la forme

$$x^{[2]} \otimes y + x \otimes y^{[2]} \quad (x \in M,\ y \in N).$$

Alors on a :

$$\bar{\Gamma}_3(M\times N) \simeq \bar{\Gamma}_3(M) \oplus \bar{\Gamma}_3(N) \oplus \{[\Gamma_2(M) \otimes N] \oplus [M \otimes \Gamma_2(N)]\}/K(M,N).$$

Preuve: On a (cf. [III], théorème III,4, p. 262)un isomorphisme canonique de modules

$$\Gamma_3(M\times N) \simeq \Gamma_3(M) \oplus \Gamma_3(N) \oplus \{[\Gamma_2(M) \otimes N] \oplus [M \otimes \Gamma_2(N)]\}$$

Dans cet isomorphisme, le module $\bar{\Gamma}_3(M\times N)$, engendré par les éléments $(x,y)^{[3]}$, a pour image un module H engendré par les éléments :

$$x^{[3]} + y^{[3]} + \{x^{[2]} \otimes y + x \otimes y^{[2]}\}$$

En faisant y (ou $x = 0$)on voit que $x^{[3]}$ (et $y^{[3]}$) $\in H$.
On a donc:

$$H = \bar{\Gamma}_3(M) \oplus \bar{\Gamma}_3(N) \oplus K(M,N)$$

Le lemme 1 en résulte.

Lemme 2 : Soient M un A-module, I un idéal de A.

Soit J l'idéal de A engendré par les éléments de l' une des formes i^2 ou $2i$ $(i \in I)$.

Soient $u : \Gamma_2(M) \longrightarrow \Gamma_2(M)/I\Gamma_2(M)$

et $v : M \longrightarrow M/JM$

les applications quotients canoniques.

Soit $H(M,I)$ le sous-module de $\Gamma_2(M)/I\Gamma_2(M) \oplus M/JM$

<u>engendré par les éléments de la forme</u>

$$a\,u(x^{[2]}) + a^2\,v(x) \qquad (a \in A, \quad x \in M)$$

<u>Alors on a</u> :

$$\tilde{\Gamma}_3(M \times A/I) \simeq \tilde{\Gamma}_3(M) \oplus [\Gamma_2(M)/I\,\Gamma_2(M) \oplus M/JM]\,/H(M,I).$$

<u>Preuve</u>: Rappelons (cf. [IV] , prop. 8, p. 136) que $\Gamma_2(A/I) \simeq A/D_2(I)$, où $D_2(I) = J$ (cf. définition loc. cit., p. 127).

Appliquons le lemme 1 où l'on prend $N = A/I$.
On sait que $\Gamma_3(N)$ est un module monogène, engendré par $e^{[3]}$ si e est un générateur de N. On a donc $\Gamma_3(N) = \bar{\Gamma}_3(N)$, de sorte que $\tilde{\Gamma}_3(N) = 0$.

On a par ailleurs des isomorphismes $\Gamma_2(M) \otimes N \simeq \Gamma_2(M)/I\Gamma_2(M)$ et $M \otimes \Gamma_2(N) \simeq M/JM$; d'où un isomorphisme :

$$[\Gamma_2(M) \otimes N] \oplus [M \otimes \Gamma_2(N)] \simeq \Gamma_2(M)/I\,\Gamma_2(M) \oplus M/JM.$$

Si, pour tout $a \in A$, on désigne par $\bar{a}$ son image canonique dans A/I, le système des générateurs $x^{[2]} \otimes \bar{a} + x \otimes \bar{a}^{[2]}$ de $K(M,N)$ a pour image dans cet isomorphisme le systeme des générateurs $a\,u(x^{[2]}) + a^2\,v(x)$ de $H(M,I)$.

A cet isomorphisme près, le lemme 2 est donc la simple traduction du lemme 1 avec $N = A/I$.

<u>Lemme 3</u> : <u>Pour tout</u> $x \in M$ <u>on a</u> :

$$u(x^{[2]}) + v(x) \in H(M,I).$$

<u>Preuve</u>: Il suffit de prendre $a=1$ dans le système des générateurs de $H(M,I)$ donné au lemme 2.

<u>Lemme 4</u> : <u>On a</u>

$$\underline{b}(M/JM) \subset H(M,I)$$

<u>Preuve</u>: Pour $a \in A$ et $x \in M$ on a en effet, en replaçant x par ax dans le lemme 3 :

$$a^2\,u(x^{[2]}) + a\,v(x) \in H(M,I).$$

Mais, toujours par le lemme 3 :

$$a^2[u(x^{[2]}) + v(x)] \in H(M,I).$$

D' où par soustraction :

$$(a^2 - a)\, v(x) \quad H(M,I).$$

Le lemme 4 en résulte.

Lemme 5 : On a :

$$I(M/JM) \subset \underline{b}(M/JM)$$

Preuve : Pour tout $i \in I$ et tout $x \in M$, on a dans M/JM:

$$i\, v(x) \equiv i^2 v(x) \text{ modulo } \underline{b}(M/JM)$$

Mais $i^2 v(x) = 0$ car $i^2 \in J$.

Lemme 6 : Quels que soient x et y dans M on a :

$$u(xy) \in H(M,I)$$

Preuve : On a, en remplaçant x par $x+y$ dans le lemme 3:

$$u(x^{[2]} + xy + y^{[2]}) + v(x+y) \in H(M,I).$$

Comme $u(x^{[2]}) + v(x) \in H(M,I)$ et $u(y^{[2]}) + v(y) \in H(M,I)$, le lemme 6 en résulte.

Lemme 7 : Tout élément de $\Gamma_2(M)/I\Gamma_2(M) \oplus M/JM$ est congru, modulo $H(M,I)$, à un élément de M/JM.

Preuve : Il suffit de la montrer pour les éléments de $\Gamma_2(M)/I\Gamma_2(M)$. Or, ce dernier module est engendré par les éléments de la forme $u(x^{[2]})$ et $u(xy)$ (x,y dans M). Modulo $H(M,I)$, l'élement $u(x^{[2]})$ est congru à $-v(x)$ (lemme 3) et l'élément $u(xy)$ est congru à 0 (lemme 6). D' où le lemme 7.

Lemme 8 : Posons $G(M,I) = (M/JM) \cap H(M,I)$.

Alors on a :

$$\tilde{\Gamma}_3(M \times A/I) \simeq \tilde{\Gamma}_3(M) \oplus (M/JM)/G(M,I).$$

Preuve : Cela résulte du lemme 2 et de l'isomorphisme

$$[\Gamma_2(M)/I\Gamma_2(M) \oplus M/JM] / H(M,I) \simeq (M/JM)/G(M,I)$$

qui se déduit du lemme 7.

Lemme 9 : On a :

$$G(M,I) = \underline{b}(M/JM)$$

En raison du lemme 4 il suffit de démontrer l'inclusion:

$$G(M,I) \subset \underline{b}(M/JM).$$

L'obtention de cette relation est la partie la plus compliquée de la démonstration du théorème 2. Nous opérons en deux étapes, en commençants par le cas où le module M est libre.

Preuve du lemme 9 quand M est un module libre :

Soit x un élément de $G(M,I)$. Etant dans $H(M,I)$ on peut l'ecrire sous la forme d'une somme finie

$$x = \sum_{\alpha} b_{\alpha}[a_{\alpha} u(x_{\alpha}^{[2]}) + a_{\alpha}^{2} v(x_{\alpha})]$$

$(b_{\alpha}, a_{\alpha} \in A \; ; \; x_{\alpha} \in M)$.

Modulo $\underline{b}(M/IM)$ on peut remplacer $a_{\alpha}^{2} v(x_{\alpha})$ par $a_{\alpha} v(x_{\alpha})$.

En posant $b_{\alpha} a_{\alpha} = c_{\alpha}$ on a donc :

$$x \equiv y \quad \text{modulo} \quad \underline{b}(M/JM)$$

avec $y = \sum_{\alpha} c_{\alpha}[u(x_{\alpha}^{[2]}) + v(x_{\alpha})]$

Mais, comme $x \in M/JM$, il en est de même de y. On a donc en fait :

$$\begin{cases} y = \sum_{\alpha} c_{\alpha} v(x_{\alpha}) \\ 0 = \sum_{\alpha} c_{\alpha} u(x_{\alpha}^{[2]}). \end{cases}$$

Cette dernière relation signifie aussi :

$$(i) \quad \sum_{\alpha} c_{\alpha} x_{\alpha}^{[2]} \in I\,\Gamma_2(M).$$

Soit $(e_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ une base de M, supposée totalement ordonnée. Il existe, pour tout α, une décomposition

$$x_{\alpha} = \sum_{\lambda} a_{\alpha\lambda} e_{\lambda} \quad (a_{\alpha\lambda} \in A, \text{ presque tous nuls}).$$

Alors, $x_{\alpha}^{[2]} = \sum_{\lambda} a_{\alpha\lambda}^{2} e_{\lambda}^{[2]} + \sum_{\lambda < \mu} a_{\alpha\lambda} a_{\alpha\mu} e_{\lambda} e_{\mu}$.

On sait que les élément $e_{\lambda}^{[2]}$ et $e_{\lambda} e_{\mu}$ $(\lambda < \mu)$ forment une base du module libre $\Gamma_2(M)$. En considérant la composante de la relation (i) sur l'élément de base $e_\lambda^{[2]}$, on obtient

(ii) $\forall \lambda \in \Lambda : \sum_\alpha c_\alpha a^2_{\alpha\lambda} \in I$.

Or, on a :

$$y = \sum_{\alpha,\lambda} c_\alpha \; a_{\alpha\lambda} \, v(e_\lambda).$$

On peut donc écrire:

$$y \equiv z \quad \text{modulo} \quad \underline{b}(M/JM)$$

où l'on pose

$$z = \sum_{\alpha,\lambda} c_\alpha \, a^2_{\alpha\lambda} \; v(e_\lambda)$$
$$= \sum_\lambda (\sum_\alpha c_\alpha \, a^2_{\alpha\lambda}) v(e_\lambda) \; .$$

En vertu de (ii), on a $z \in I(M/JM)$ et donc aussi $z \in \underline{b}(M/JM)$ (lemme 5) . Ainsi, on a : $x \in \underline{b}(M/JM)$, ce qui démontre le lemme 9 lorsque M est un module libre.

<u>Preuve du lemme 9 dans le cas général</u> :

On représente M comme l'image d'un module libre L par un morphisme surjectif $f : L \to M$.

Nous posons : $\mathrm{Ker}\ f = K$

Il existe alors (cf. III, § 4, p. 251) un morphisme surjectif $f^{[2]} : \Gamma_2(L) \to \Gamma_2(M)$ défini, pour x et y dans M, par :

$$f^{[2]}(x^{[2]}) = f(x)^{[2]}$$
$$f^{[2]}(xy) = f(x)f(y).$$

Nous posons : $\mathrm{Ker}\ f^{[2]} = K_2$.

Il résulte de [III](prop. IV. 8, p. 284)que le module K_2 est engendré par les éléments du type $x^{[2]} (x \in K)$ou du type xy $(x \in K,\ y \in M)$.

On définit les applications canoniques :

$$U : \Gamma_2(L) \to \Gamma_2(L)/I\,\Gamma_2(L) \quad \text{et} \quad V : L \to L/JL \; .$$

Il existe alors des morphismes surjectifs

$g : L/JL \twoheadrightarrow M/JM$ et $h : \Gamma_2(L)/I\Gamma_2(L) \twoheadrightarrow \Gamma_2(M)/I\Gamma_2(M)$ tel qu'on puisse écrire des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_2(L) & \xrightarrow{f^{[2]}} & \Gamma_2(M) \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ \Gamma_2(L)/I\Gamma_2(L) & \xrightarrow{h} & \Gamma_2(M)/I\Gamma_2(M) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ L/JL & \xrightarrow{g} & M/JM \end{array}$$

On a :

$$\mathrm{Ker}\ h = U(K_2) \text{ et } \mathrm{Ker}\ g = V(K).$$

On peut alors écrire un diagramme commutatif (à flèches surjectives)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_2(L) \oplus L & \xrightarrow{f^{[2]} \oplus f} & \Gamma_2(M) \oplus M \\ {\scriptstyle U \oplus V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u \oplus v} \\ \Gamma_2(L)/I\Gamma_2(L) \oplus L/JL & \xrightarrow{h \oplus g} & \Gamma_2(M)/I\Gamma_2(M) \oplus M/JM \end{array}$$

avec

(iii) $\mathrm{Ker}\ (h \oplus g) = U(K_2) \oplus V(K)$

Par $(h \oplus g)$, les générateurs $a\,U(y^{[2]}) + a^2\,V(y)$ de $H(L,I)$ ($a \in A$, $y \in L$), sont appliqués sur les éléments $a\,u(f(y)^{[2]}) + a^2\,v(f(y))$, qui sont les générateurs de $H(M,I)$. On a donc :

$$(h \oplus g)\,[H(L,I)] = H(M,I).$$

Il en résulte que :

$$(h \oplus g)^{-1}[H(M,I)] = H(L,I) + \mathrm{Ker}\ (h \oplus g)$$

$$= H(L,I) + U(K_2) + V(K) \text{ (d' après (iii))}.$$

Au second membre, la présence de $U(K_2)$ est inutile. En effet, d' après la génération rappelée ci-dessus de K_2, $U(K_2)$ est engendré par des éléments de deux types.

- d'une part, ceux du type $U(x^{[2]})$, avec $x \in K$. Or, on peut écrire:

$$U(x^{[2]}) = [U(x^{[2]}) + V(x)] - V(x);$$

au second membre, le terme entre crochets est dans $H(L,I)$ (lemme 3), tandis que $V(x) \in V(K)$.

- d'autre part, ceux du type $U(xy)$ $(x \in K,\ y \in L)$; ceux-là sont dans $H(L,I)$ (lemme 6).

On a donc bien, en définitive:

$$(h \oplus g)^{-1}\ [H(M,I)] = H(L,I) + V(K)$$

Considérons alors un élément x pris dans $G(M,I) = H(M,I) \cap (M/JM)$. Comme $x \in M/JM$, il existe un élément y de L tel que :

$$x = g \circ V(y).$$

Comme $x \in H(M,I)$, on a :

$$V(y) \in (f \oplus g)^{-1}\ [H(M,I)] = H(L,I) + V(K)$$

Il existe donc des éléments $z \in H(L,I)$ et $t \in K$ tels que

$$V(y) = z + V(t)$$

Comme $z = V(y-t)$, on a aussi $z \in L/JL$, donc $z \in H(L,I) \cap L/JL = G(L.I)$.

Dès lors :

$$x = g \circ V(y) = g(z) + g \circ V(t)$$

$$= g(z) \text{ car } g \circ V(t) = v \circ f(t) = v(0) = 0\ .$$

Comme $z \in G\ (L,I) = \underline{b}(L/JL)$ (lemme 9 dans le cas des modules libres), on en déduit que $x \in \underline{b}(M/JM)$ ce qui achève de démontrer le lemme 9 .

Du lemme 9, on déduit que pour tout module M on a :

$$(M/JM)/G\ (M,I) = (M/JM)/\ \underline{b}(M/JM) \simeq M/(J+\underline{b})M.$$

Comme $J \subset I$, on a : $J + \underline{b} \subset I + \underline{b}$; mais inversement, on a $I + \underline{b} \subset J + \underline{b}$, car tout élément i de I peut s'écrire $(i-i^2) + i^2$, avec $i-i^2 \in \underline{b}$ et $i^2 \in J$. Donc $I + \underline{b} = J + \underline{b}$.

Finalement on a :

$$(M/JM)/G(M,J) \simeq M/(I+\underline{b})M.$$

Ce resultat, porté dans le lemme 8, fournit l énoncé d'un théorème II.

REFERENCES

[I] PRÓSZYŃSKI A., Some functors related to polynomial theory, Fundamenta Mathematicae XCVIII, 1978 , p. 219-229

[II] PRÓSZYŃSKI A., Some functors related to polynomial theory, II, Colloque sur les formes quadratiques (1977, Montpellier)Bull. So. Math. France, Mémoire 59, 1979, p. 125-129

[III] ROBY N., Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 3è série, t. 80, 1963, p. 213-348

[IV] ROBY N., Sur l'algèbre des puissances divisees d'un module monogène, Revista de la Unión Matemática Argentina, Volumen 24, N'umero 4, 1969, p. 127-141

O FUNKTORZE ZWIĄZANYM Z PODZIELONYMI POTĘGAMI STOPNIA 3

Streszczenie

Niech $\Gamma_3(M)$ oznacza składową jednorodną stopnia 3 algebry z podzielonymi potęgami $\Gamma(M)$ i niech $\overline{\Gamma_3(M)}$ będzie podmodułem $\Gamma_3(M)$ generowanym przez wszystkie podzielone potęgi $x^{[3]}$ $(x \in M)$. Autor oblicza moduł ilorazowy $\widetilde{\Gamma}_3(M)$ w przypadku, gdy M jest skończoną sumą prostą modułów cyklicznych.