ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1988 z.10

WALDEMAR ORWAT
WSP w Bydgoszczy

O PEWNYCH ZBIORACH MOCNEJ MIARY ZERO

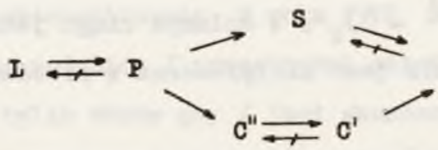
Zbiory o których mowa w tym artykule posiadają pewne "osobliwe" własności. Ich osobliwość polega na tym, iż choć "jakościowo" /z punktu widzenia teorii miary/ są one małe, to pod względem mocy mogą być całkiem spore. Problematykę związaną z pewnymi osobliwymi własnościami zbiorów zapoczątkował w 1908 roku Bernstein, a w roku 1914 ukazała się praca [8] M.N.Łuzina w której to Łuzin, przyjmując hipotezę continuum /oznaczaną w tej pracy przez CH/, skonstruował na prostej zbiór mocy ω_1 /liczbę kardynalną $\mathcal{K}$ utożsamiamy z najmniejszą liczbą porządkową $\mathcal{L}$ taką, że zbiór liczb porządkowych mniejszych niż $\mathcal{L}$ ma moc $\mathcal{K}$, przez ω_1 oznaczymy pierwszą nieprzeliczalną liczbę porządkową/, taki, że jego przekrój z dowolnym zbiorem pierwszej kategorii był przeliczalny /jak zauważył J.Morgan, po raz pierwszy jednak zbiór ten został opisany przez P.Mahlo w 1913 roku [9] /. Ogólnie podzbiór L dowolnej przestrzeni topologicznej Y, którego przekrój z każdym zbiorem pierwszej kategorii jest przeliczalny przyjęto nazywać <u>zbiorem Łuzina.</u>

W roku 1934 A.S.Besicovitch [1] podał po raz pierwszy definicję zbiorów skoncentrowanych: i tak podzbiór X przestrzeni topologicznej Y jest <u>skoncentrowany na zbiorze $D \subset Y$</u> wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego zbioru otwartego $U \subset Y$, jeżeli $D \subset U$, to zbiór $X \setminus U$ jest przeliczalny. Jeżeli zbiór X jest skoncentrowany na pewnym zbiorze przeliczalnym $D \subset Y$, to taki zbiór X nazywamy krótko <u>skoncentrowanym</u>, a gdy dodatkowo $D \subset X$, to o zbiorze X mówimy, że posiada <u>własność (P)</u>. Oczywiście każdy zbiór X, który posiada własność (P) jest skoncentrowany. W roku 1938 E.Szpilrajn-Marczewski [16] wykazał, że podzbiór X przestrzeni ośrodkowej Y jest zbiorem Łuzina wtedy i tylko wtedy gdy X jest skoncentrowany na każdym przeliczalnym i gęstym podzbiorze przestrzeni Y. Z twierdzenia tego można już łatwo wywnioskować, że w przestrzeniach metrycznych i ośrodkowych każdy zbiór Łuzina posiada własność (P). Okazuje się jednak, że między rodziną zbiorów Łuzina L a rodziną P zbiorów z własnością (P) nie zachodzi równość. Przy założeniu CH na prostej można skonstruować zbiór, który posiada własność (P) a nie jest zbiorem Łuzina /wybierając w zbiorze Cantora zbiór Łuzina mocy ω_1/.

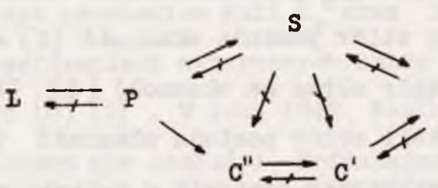
W roku 1919 E.Borel [3] zdefiniował rodzinę zbiorów z własnością (C) /zbiorów mocnej miary zero/. Mówimy, że podzbiór X przestrzeni Y posiada <u>własność (C)</u>, jeśli dla każdego ciągu $(r_n)_n$ dodatnich liczb rzeczywistych istnieje ciąg $(K_n)_n$ kul w przestrzeni Y taki, że r_n jest promieniem kuli K_n oraz $X \subset \bigcup_n K_n$. Łatwo pokazać, że w przestrzeniach metrycznych każdy zbiór skoncentrowany posiada własność (C) [1] . W roku 1942 Besicovitch [2] wykazał, że implikacja przeciwna nie zachodzi. Definiując rodzinę zbiorów mocnej miary zero Borel postawił jednocześnie słynną hipotezę mówiącą o tym, iż wszystkie zbiory z własnością (C) są przeliczalne. Od dawna było wiadomo, że jest ona sprzeczna z CH /zauważył to W.Sierpiński w 1928 roku podając jako przykład zbiór Łuzina [13]/, jak również z aksjomatem Martina /patrz np. [17] /. Korzystając z aksjomatu Martina można też wykazać, że każdy zbiór mocy mniejszej niż continuum posiada własność (C). Długo jednak nie było wiadomo, czy hipotezy Borela nie da się obalić na gruncie teorii mnogości. Dopiero w roku 1976 ukazała się praca R.Lavera [7], w której autor dowiódł niesprzeczności hipotezy Borela z aksjomatyką ZFC wzbogaconą o zdanie "$2^{\omega} = \omega_2$". W dalszym ciągu jednak nie wiadomo, czy hipoteza Borela jest niesprzeczna z nierównością "$2^{\omega} > \omega_2$".

W roku 1935 pojawiło się inne pytanie, tym razem postawione przez Sierpińskiego [15] - czy własność (C) jest niezmiennikiem przekształceń ciągłych? Negatywnej odpowiedzi udzielił na nie F.Rothberger w roku 1941 [13], definiując przy tej okazji zbiory z własnościami (C") i (C'). Mówimy, że podzbiór X przestrzeni topologicznej Y posiada <u>własność (C")</u>, jeśli dla każdej rodziny $\{\mathcal{U}_n : n \in N\}$ otwartych pokryć zbioru X istnieje ciąg $(x_n)_n$ elementów zbioru X taki, że $X \subset \bigcup_n U(x_n)$, gdzie $U(x_n) \in \mathcal{U}_n$ /zapis $U(x)$ oznacza, że $x \in U(x)$ /. Definicja zbioru z <u>własnością (C')</u> jest podobna do definicji zbioru z własnością (C") z tą różnicą, że każde z pokryć $\mathcal{U}_n$ jest skończone. Można udowodnić, że w przestrzeni σ-zwartej zbiór posiada własność (C') wtedy i tylko wtedy gdy każdy jego ciągły obraz ma własność (C) [12]. Łatwo zauważyć również, że jeżeli zbiór posiada własność (C") to ma on także własność (C'). Rothberger postawił w związku z tym otwarty do tej pory problem - w jakich przestrzeniach własności (C') i (C") są równoważne? Częściową odpowiedź na to pytanie dali A.W.Miller i D.H.Fremlin [11], którzy przy założeniu CH skonstruowali w przestrzeni R zbiór, który ma własność (C'), lecz nie posiada własności (C"). Rothberger udowodnił [12], że w przestrzeniach σ-zwartych każdy zbiór z własnością (C') posiada również własność (C).

Następujący diagram przedstawia zwiazki pomiędzy omawianymi rodzinami zbiorów na prostej



Rothberger wykazał także, że jeżeli na prostej istnieje zbiór skoncentrowany mocy 2^{ω}, to wówczas każdy podzbiór prostej mocy 2^{ω} jest obrazem ciągłym pewnego zbioru skoncentrowanego w przestrzeni R. Ponieważ własności $(C")$ i (C') są niezmiennicze względem przekształceń ciągłych, zatem zakładając CH można wykazać, że istnieją na prostej zbiory skoncentrowane, które nie posiadają własności $(C")$ i (C') [13]. Stąd na drodze prostej dedukcji nasz diagram daje się uzupełnić jak następuje:



Widać zatem, że dla uzupełnienia naszego diagramu wystarczy podać przykład zbioru, który posiada własność $(C")$ a nie jest zbiorem skoncentrowanym. Zbiór taki można skonstruować modyfikując konstrukcję przykładu zbioru z własnością (C) nie będącego zbiorem skoncentrowanym [2] . Zauważył to, według J.B.Browna [4] , R.Gardner "in an informal communication". Ponieważ w żadnych znanych nam publikacjach nie spotkaliśmy tej konstrukcji dlatego przytaczamy ją tutaj w całości.

TWIERDZENIE. Przyjmijmy CH. W przestrzeni R istnieje zbiór, który posiada własność (C") , lecz nie jest skoncentrowany, a zatem nie posiada własności (P) .

DOWÓD. Rozważmy rodzinę wszystkich zbiorów domkniętych i nigdziegęstych w R. Ustawmy je w ciąg pozaskończony $F_1, F_2, \ldots, F_\alpha, \ldots$ /$\alpha < \omega_1$ /. Metodą indukcji pozaskończonej skonstruujemy rodzinę $\{P_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ parami rozłącznych, niepustych zbiorów doskonałych i nigdziegęstych, o tej własności, że każdy zbiór pierwszej kategorii w R przecina niepusto jedynie przeliczalnie wiele zbiorów P_α . Niech P_0 będzie zbiorem Cantora. Załóżmy, że mamy już określoną rodzinę $\{P_\beta : \beta < \alpha\}$ zbiorów doskonałych i nigdziegęstych takich, że dla każdego $\beta < \alpha$ zbiór P_β jest rozłączny z sumą $\bigcup_{\gamma<\beta} P_\gamma \cup \bigcup_{\gamma<\beta} F_\gamma$ Ponieważ suma $\bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta \cup \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$ jest zbiorem pierwszej kategorii, typu F_σ , więc jej uzupełnienie jest zbiorem rezydualnym typu G_δ . Zatem w uzupełnieniu tym można wybrać podzbiór P_α homeomorficzny ze zbiorem Cantora / [6] str.398/ , a więc doskonały i nigdziegęsty. Skonstruowaliśmy w ten sposób rodzinę $\{P_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ parami rozłącznych, niepustych zbiorów doskonałych i nigdziegęstych taką, że dla każdego $\alpha < \omega_1$ spełniony jest następujący warunek:

$$P_\alpha \cap \left(\bigcup_{\gamma<\alpha} P_\gamma \cup \bigcup_{\gamma<\alpha} F_\gamma \right) = \emptyset$$

Łatwo zauważymy, że wtedy każdy zbiór pierwszej kategorii w R przecina niepusto jedynie przeliczalnie wiele zbiorów P_α . Wybierzmy następnie w każdym zbiorze P_α /$\alpha < \omega_1$/ zbiór L_α mocy ω_1 , będący zbiorem Łuzina w P_α , i połóżmy $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} L_\alpha \cup A$, gdzie A jest zbiorem tych liczb wymiernych, które nie należą do zbioru $\bigcup_{\alpha<\omega_1} L_\alpha$. Ustawmy teraz wszystkie liczby wymierne w ciąg $(x_n)_n$. Niech $\{\mathcal{U}_n : n \in N\}$ będzie dowolną rodziną otwartych pokryć zbioru X. Zauważmy, że zbiór liczb wymiernych jest podzbiorem X, więc dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór otwarty $U(x_n) \in \mathcal{U}_{2n}$ taki, że $x_n \in U(x_n)$. Wtedy $U = \bigcup_n U(x_n)$ jest zbiorem otwartym i gęstym, a zatem $R \setminus U$ jako zbiór pierwszej kategorii przecina niepusto jedynie przeliczalną ilość zbiorów P_α . W konsekwencji istnieje $\alpha_0 < \omega_1$ taka, że $P_\beta \cap (R \setminus U) = \emptyset$ dla każdego $\beta > \alpha_0$. Stąd otrzymujemy następujący warunek:

$$X_0 = \bigcup_{\alpha_0<\gamma<\omega_1} L_\gamma \cup A \subset \bigcup_{\alpha_0<\gamma<\omega_1} P_\gamma \cup A \subset U$$

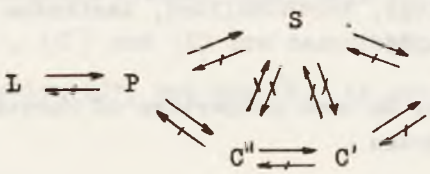
Ponieważ zbiory L_β posiadają własność $(C")$, zatem zbiór $X_1 = \bigcup_{\beta\leq\alpha_0} L_\beta$ jako przeliczalna suma zbiorów z własnością $(C")$ posiada własność $(C")$. Istnieje więc ciąg $(y_n)_n$ elementów zbioru X_1 taki, że $X_1 \subset \bigcup_n U(y_n)$, gdzie $U(y_n) \in \mathcal{U}_{2n+1}$ i $y_n \in U(y_n)$. Reasumując, znaleźliśmy ciąg $(z_n)_n$ elementów zbioru X, gdzie $z_{2n} = x_n$ oraz $z_{2n+1} = y_n$ taki, że

$$X = X_0 \cup X_1 \subset \bigcup_n U(z_n) \text{ i } z_n \in U(z_n) \in \mathcal{U}_n ,$$

co wobec dowolności wyboru rodziny $\{\mathcal{U}_n : n \in N\}$ dowodzi, że X posiada własność $(C")$. Pokażemy teraz, że X nie jest zbiorem skoncentrowanym. Istotnie, niech $D \subset R$ będzie dowolnym zbiorem przeliczalnym. Wtedy istnieje $\alpha < \omega_1$ dla której $P_\alpha \cap D = \emptyset$, a zatem D jest podzbiorem zbioru otwartego $R \setminus P_\alpha$, W efekcie zbiór $X\setminus$

$\setminus(R \setminus P_{\mathcal{L}}) \supset L_{\mathcal{L}}$ jest nieprzeliczalny.

Z istnienia powyższego zbioru wynika, że: $C'' \nrightarrow S$, $C \nrightarrow P$ oraz $C \nrightarrow S$, a stąd postać naszego diagramu wygląda następująco:



LITERATURA

[1] A.S.Besicovitch, Concentrated and rarified sets of points, Acta. Math. 62/1934/, 289-300

[2] Idem, Relations between concentrated sets and sets possessing property C, Proc. Cambridge Philos. Soc. 38 /1942/, 20-23

[3] Borel E ., Sur la classification des ensembles de mesure nulle Bull. Soc. Math. France 47 /1919/, 97-125

[4] J.B. Brown i G.V.Cox, Classical theory of totally imperfect sets, Real Anal. Exchange 7/2/ /1982/

[5] K.Kuratowski, Topologia tom 1 /po rosyjsku/, Moskwa /1966/

[6] K.Kuratowski i A.Mostowski, Teoria mnogości, PWN Warszawa /1978/

[7] R.Laver, On the consistency of Borel´s conjecture, Acta. Math. 137 /1976/, 151-169

[8] N.Łuzin, Sur un probleme de M.Baire, C. C.R.Hebdomadaires Seances Acad. Sci. Paris 158 /1914/ , 1258-1261

[9] P.Mahlo, Über Teilmengen des Kontinuums von dessen Machtigkeit, Sitzungsberichte der Sachsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Naturwissen-Schaftliche Klasse 65 /1913/, 283-315

[10] A.W.Miller, Special subset of the real line, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam - New York-Oxford /1984/, 201-233

[11] Idem i D.H. Fremlin, On some properties of Hurewicz, Menger and Rothberger, w druku

[12] F.Rothberger, Eine verscharfung der eigenschaft C, Fund. Math. 30 /1938/ , 215-217

[13] Idem, Sur les families indenombrables des suites de nombers naturels et les problems conncernant la propriete C, Proc. Cambridge Philos. Soc. 37 /1941/, 109-126

[14] Sierpiński W., Sur un ensemble non denombrable, donc toute image continue est de mesure nulle, Fund. Math. 11 /1928/ , 301-304

[15] Idem, Probleme 67, Fund. Math. 25 /1935/, 578

[16] E.Szpilrajn-Marczewski, The characteristic function of a sequence of sets and some of its applications, Fund. Math. 31 /1938/, 207-223

[17] M.Talagrand, Sommes vectorielles d´ensembles de mesure nulle, C.R. Hebdomadaires Seancas Acad. Sci. Paris 280 /1975/ , 853-855

ON SOME STRONG MEASURE ZERO SETS

Abstract

The relationships between Lusin sets and sets with the properties (P) , (C'') , (C') and (C) are described. An example of a set with the properties (C'') and non (P) is given.