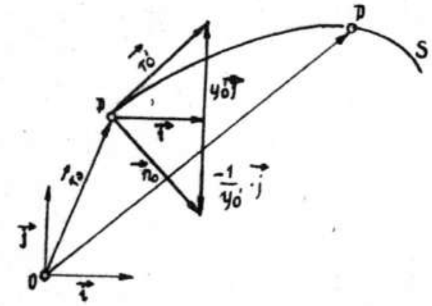
Halina J. Jędryka (Bydgoszcz)

PEWNE UJĘCIE METODYCZNE DOTYCZĄCE CIĘCIW, ŚREDNIC I BIEGUNOWYCH STOŻKOWYCH

1. Pochodna wektora wodzącego punktu na krzywej

Niech dana będzie linia stożkowa S i niech $\vec{r}_o$ będzie wektorem wodzącym danego punktu $P_o(x_o, y_o)$ na stożkowej S, takim, że iloczyn $x_o \cdot y_o \neq 0$, natomiast $\vec{r}$ niech oznacza wektor wodzący punktu $P(x,y)$ na stożkowej S (rys. 1).



rys. 1.

Przyrostem $\Delta \vec{r}_o$ wektora wodzącego $\vec{r}_o$ w punkcie $P_o(x_o, y_o)$ nazywamy wektor

$$\Delta \vec{r}_\rho = \vec{r}_P - \vec{r}_o = (x-x_o)\,\vec{i} + (y-y_o)\,\vec{j}\,.$$

Mnożąc wektor $\Delta \vec{r}_o$ przez skalar

$$\frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{x - x_o}$$

otrzymamy wektor kollinearny z wektorem $\Delta \vec{r}_o$ w postaci

$$\frac{\Delta \vec{r}_o}{x} = \frac{x-x_o}{x-x_o}\,\vec{i} + \frac{y-y_o}{x-x_o}\,\vec{j}\,.$$

Jeżeli istnieje granica powyższej równości, gdy $\Delta x \to o$,

czyli

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \vec{r}_o}{\Delta x} = \vec{i} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y-y_o}{x-x_o}\,\vec{j}\,,$$

to nazywamy ją pochodną wektora wodzącego $\vec{r}$ w punkcie P_0 i oznaczamy przez $\vec{r}_0'$.

Zakładając istnienie granicy, mamy

$$\vec{r}_0' = \vec{i} + y_0' \vec{j} \; . \tag{S.1}$$

Wektor $\vec{r}_0'$ jest położony na stycznej do linii S w punkcie P_0 ; wynika to z interpretacji geometrycznej pochodnej y_0'.

Zauważmy, że wektor

$$\vec{n}_0 = \vec{i} + \frac{-1}{y_0'} \vec{j} \tag{S.2}$$

zaczepiony w P_0 na linii S, jest ortogonalny do wektora $\vec{r}_0'$, zaczepionego także w P_0, mamy bowiem

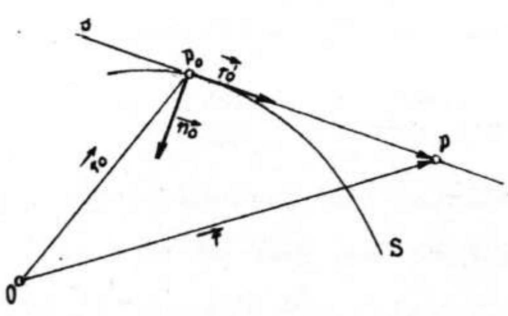
$$\vec{r}_0' \cdot \vec{n}_0 = 1 - 1 = 0 \; .$$

Wektor $\vec{n}_0$, określony przez (S.2) jest więc prostopadły w punkcie P_0 do stycznej linii S.

2. Równanie stycznej do stożkowej

Znajdziemy równanie wektorowe prostej stycznej s w punkcie $P_0(x_0, y_0)$, $x_0 \cdot y_0 \neq 0$, do stożkowej S.

Wektorem kierunkowym stycznej s w punkcie P_0 jest wektor $\vec{r}_0' \neq \vec{0}$ przy przyjętym założeniu, że $x_0 \cdot y_0 \neq 0$, rys. 2. Punkt $P(x,y)$ płaszczyzny Π będzie położony na stycznej s, gdy wektory $\overrightarrow{P_0P}$ i $\vec{r}_0'$ będą współliniowe, czyli gdy będzie spełniona równość



rys. 2.

$$\overrightarrow{P_oP} = t\,\vec{r}\,'_o \qquad \text{gdzie } t \in R\ .$$

Ale $\overrightarrow{P_oP} = \vec{r} - \vec{r}_o$; będzie więc $\vec{r} - \vec{r}_o = \vec{r}\,'_o\ t$, skąd otrzymamy równanie wektorowe stycznej s w punkcie P_o do linii S w postaci

$$(S.3) \qquad \vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}\,'_o \cdot t \qquad t \in R\ .$$

Klasyczne równania stycznych do stożkowych rozpowszechnione w literaturze, mają jednak postać skalarową.

Aby od wektorowego równania (S.3) stycznej s przejść do równania skalarowego, wyeliminujemy z równania (S.3) wektor $\vec{r}\,'_o$, który, wyliczony dla danej stożkowej, nie zapewnia równaniu stycznej s "eleganckiej" postaci. W tym celu równanie (S.3) pomnożymy skalarnie przez wektor $\vec{n}_o \neq \vec{0}$ przy przyjętych założeniach. Otrzymamy

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_o = \vec{r}_o \cdot \vec{n}_o + t\ \vec{r}\,'_o \cdot \vec{n}_o\ ,$$

skąd

$$(S.4) \qquad \vec{r} \cdot \vec{n}_o = \vec{r}_o \cdot \vec{n}_o$$

gdyż wobec $\vec{r}\,'_o \perp \vec{n}_o$ jest $\vec{r}\,'_o \cdot \vec{n}_o = 0$.

Zauważmy, że równanie

$$(S.5) \qquad b^2x^2 + \alpha a^2y^2 = a^2b^2$$

jest równoważne równaniu elipsy, gdy $\alpha = 1$, a równaniu hiperboli - gdy $\alpha = -1$; natomiast równanie okręgu otrzymamy z tej postaci, kładąc $\alpha = 1$ oraz $b = a = R$.

Z równania (S.5) otrzymamy

$$b^2x + \alpha a^2 y \cdot y' = 0$$

skąd

$$y' = -\frac{b^2}{\alpha a^2}\,\frac{x}{y}\ .$$

W punkcie $P_o(x_o,y_o)$ y' będzie

$$y'_o = -\frac{b^2}{\alpha a^2}\,\frac{x_o}{y_o}\ ,$$

skąd
$$\frac{-1}{y'_o} = \alpha\,\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y_o}{x_o}$$

Wobec (S.2) otrzymamy

$$\text{(S.6)}\qquad \vec{n}_o = \vec{i} + \alpha\,\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y_o}{x_o}\,\vec{j}\ .$$

Uwzględniając równość (S.6), możemy równanie (S.4) napisać w postaci

$$(x\vec{i} + y\vec{j})\cdot\left(\vec{i} + \alpha\,\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y_o}{x_o}\,\vec{j}\right) = (x_o\vec{i} + y_o\vec{j})\cdot\left(\vec{i}+\alpha\,\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y_o}{x_o}\,\vec{j}\right),$$

czyli

$$x + \alpha\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y_o}{x_o}\,y = x_o + \alpha\,\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y_o}{x_o}\ ,$$

skąd mnożąc obustronnie przez b^2x_o otrzymamy równanie

$$b^2x_ox + \alpha\,a^2y_oy = b^2x^2 + \alpha\,a^2y_o^2\ ,$$

w którym zamiast prawej strony możemy napisać a^2b^2, otrzymując równanie

$$\text{(S.5)}\qquad b^2x_ox + \alpha\,a^2y_oy = a^2b^2\ .$$

Z równania (S.5), kładąc $\alpha = 1$ oraz $a = b = R$, otrzymamy równanie stycznej do okręgu $x^2 + y^2 = R^2$ w postaci

$$\text{(S.7)}\qquad x_ox + y_oy = R^2\ .$$

Kładąc $\alpha = 1$ i dzieląc obustronnie przez a^2b^2 otrzymamy równanie stycznej do elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ w postaci

$$\text{(S.8)}\qquad \frac{x_ox}{a^2} + \frac{y_oy}{b^2} = 1\ .$$

Kładąc natomiast $\alpha = -1$ i dzieląc obustronnie przez a^2b^2, otrzymamy równanie stycznej do hiperboli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ w postaci

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 . \tag{S.9}$$

Są to kanoniczne równania stycznych. Obejmują one także styczne w tych punktach $P_0(x_0, y_0)$, w których $x_0 \cdot y_0 = 0$.

Chcąc uzyskać równanie stycznej do paraboli $y^2 = 2px$ w punkcie $P_0(x_0, y_0)$, gdzie $x_0 \cdot y_0 \neq 0$, znajdujemy z równania pochodną

$$y^2 = 2px$$

$$y' = \frac{p}{y} ,$$

skąd

$$-\frac{1}{y_0'} = -\frac{y_0}{p} ,$$

a więc

$$\vec{n}_0 = \vec{i} - \frac{y_0}{p}\vec{j} . \tag{S.10}$$

Uwzględniając równość (S.9) równanie (S.4) możemy napisać w postaci

$$(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (\vec{i} - \frac{y_0}{p}\vec{j}) = (x_0\vec{i} + y_0\vec{j}) \cdot (\vec{i} - \frac{y_0}{p}\vec{j}) ,$$

czyli

$$x - \frac{y_0}{p} y = x_0 - \frac{y_0^2}{p} ,$$

skąd

$$px - y_0 y = px_0 - y_0^2 ,$$

ale $y_0^2 = 2px_0$, a więc będzie

$$p_x - y_0 y = px_0 - 2px_0 ,$$

$$px - y_0 y = -px_0 ,$$

skąd

(S.11) $$y_0 y = p(x + x_0) .$$

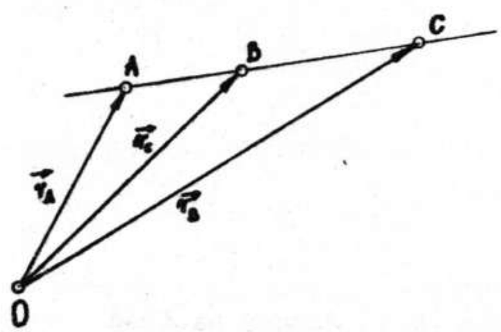
Równanie (S.11) nazywamy kanonicznym równaniem stycznej w punkcie $P_0(x_0,y_0)$ do paraboli $y^2 = 2px$. Równanie (S.11) obejmuje także styczną w punkcie $P_0(0,0)$, czyli w wierzchołku tej paraboli.

3. Podział odcinka w danym stosunku

Niech na prostej l dany będzie odcinek o końcach w punktach $A(x_A,y_A)$ i $B(x_B,y_B)$. Powiadamy, że punkt $C(x_c,y_c)$ dzieli odcinek AB w stosunku λ, jeżeli spełniona jest równość

(D.1) $$\vec{AC} = \lambda \vec{CB} .$$

Znajdziemy wektor wodzący punktu podziału C (rys. 3).



rys. 3.

Wobec równości

$$\vec{r}_C = \vec{r}_A + \vec{AC} \text{ oraz } \vec{r}_B = \vec{r}_C + \vec{CB}$$

otrzymujemy

$$\vec{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A \text{ oraz } \vec{CB} = \vec{r}_B - \vec{r}_C.$$

Podstawiając ostatnie równości do (D.1) otrzymamy

$$\vec{r}_C - \vec{r}_A = \lambda(\vec{r}_B - \vec{r}_C) ,$$

czyli

$$\vec{r}_C = \vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B - \lambda\vec{r}_C ,$$

skąd

$$(1 + \lambda)\vec{r}_C = \vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B .$$

Z ostatniej równości otrzymujemy

(D.2) $$\vec{r}_C = \frac{\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B}{1+\lambda} \qquad \lambda \in R^+$$

skąd, podstawiając $\frac{1}{1+\lambda} = t$, czyli $\lambda = \frac{1}{t} - 1$, równość

(D.2) przyjmie postać

(D.3) $$\vec{r}_C = t\,\vec{r}_A + (1-t)\,\vec{r}_B \qquad 0 \leq t \leq 1 .$$

Otóż (D.2) i (D.3) są wektorowymi równaniami odcinka AB, $\vec{r}_C$ jest wektorem wodzącym dowolnego punktu C odcinka AB. Zauważmy, że równanie (D.2) odcinka możemy napisać w postaci

$$x_C\vec{i} + y_C\vec{j} = \frac{1}{1+\lambda}(x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) + \frac{1}{1+\lambda}(x_B\vec{i} + y_B\vec{j}),$$

czyli

$$x_C\vec{i} + y_C\vec{j} = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}\vec{i} + \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}\vec{j} ,$$

skąd

(D.4) $$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} ; \qquad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} .$$

Dla $\lambda = 1$ otrzymujemy z (D.1)

$$\vec{AC} = \vec{CB} ,$$

czyli punkt C, dla $\lambda = 1$ lub $t = \frac{1}{2}$, dzieli odcinek AB na połowy. Współrzędne środka odcinka AB wobec (D.4) będą równe

(D.5) $$x_o = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_o = \frac{y_A + y_B}{2} ,$$

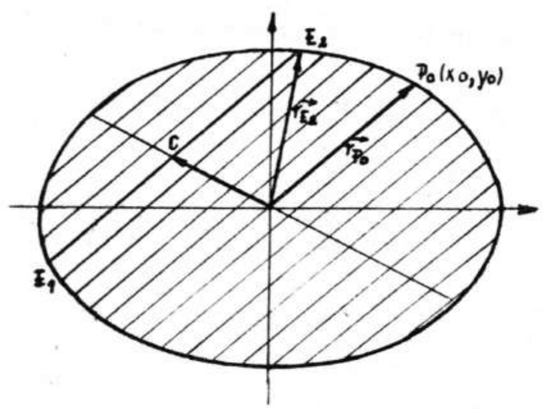
natomiast wektor wodzący środka będzie

(D.6) $$\vec{r}_o = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2} .$$

4. Cięciwy i średnice stożkowej

Weźmy pod uwagę określony punkt $P_o\ (x_o, y_o)$, dla którego $x_o \cdot y_o \neq 0$. Wektor wodzący punktu P_o możemy przedstawić w postaci $\vec{r}_{P_o} = x_o(\vec{i} + \frac{y_o}{x_o}\vec{j}) = x_o(\vec{i} + m\vec{j})$, skąd widać, że wektor $\vec{r}_{P_o}$ jest współliniowy z wektorem $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} \neq \vec{0}$.

Weźmy dalej zbiór cięciw E_1E_2 elipsy $E(0,a,b)$ (patrz [1]) równoległych do wektora kierunkowego $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j}$. Mając dany wektor kierunkowy $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j}$, możemy z łatwością napisać równanie wektorowe jakiejkolwiek cięciwy E_1E_2, jeżeli dodatkowo określimy punkt C, przez który ta cięciwa przechodzi. W tym celu wystarczy obrać na każdej cięciwie E_1E_2 punkt C, który jest jej środkiem.



rys. 4.

Równania wektorowe prostych, na których leżą cięciwy E_1E_2 (rys. 4), będą więc

(D.7) $\quad \vec{r} = \vec{r}_C + (\vec{i} + m\vec{j})t, \quad t \in R,$

gdzie wektory $\vec{r}_C$ są wektorami wodzącymi środków cięciw E_1E_2.

Wektory wodzące końców cięciw E_i $(i = 1,2)$ są równe

$$\vec{r}_{E_i} = \vec{r}_C + (\vec{i} + m\vec{j})\,t_{E_i},$$

skąd

$$\vec{r}_{E_1} + \vec{r}_{E_2} = 2\,\vec{r}_C + (\vec{i} + m\vec{j})(t_{E_1} + t_{E_2}).$$

Z drugiej strony, ponieważ $\vec{r}_C$ jest wektorem wodzącym środków cięciw E_1E_2, więc wobec (D.6) $\vec{r}_{E_1} + \vec{r}_{E_2} = 2\,\vec{r}_o$, przeto

$$2\,\vec{r}_C = 2\,\vec{r}_C + (\vec{i} + m\,\vec{j})(t_{E_1} + t_{E_2}) \quad ,$$

skąd

$$t_{E_1} + t_{E_2} = 0$$

czyli $\quad t_{E_2} = -\,t_{E_1}$,

co oznacza, że parametr t dla punktów końcowych cięciw E_1E_2 różni się znakiem. Wektory wodzące końców E_1 i E_2 dowolnej cięciwy E_1E_2 będą więc równe

$$(\mathrm{D}.8_1) \quad \vec{r}_{E_1} = \vec{r}_C + (\vec{i} + m\,\vec{j})\,t = (x_C + t)\,\vec{i} + (y_C + m\,t)\,\vec{j} \, ,$$

$$(\mathrm{D}.8_2) \quad \vec{r}_{E_2} = \vec{r}_C - (\vec{i} + m\,\vec{j})\,t = (x_C - t)\,\vec{i} + (y_C - m\,t)\,\vec{j} \, ,$$

gdzie $t = 0$.

Ale wektory wodzące: $\vec{r}_{E_1}$ oraz $\vec{r}_{E_2}$ punktów E_1 i E_2 elipsy $E\,(0,a,b)$ (patrz [1]) muszą spełniać równanie (E.2) (patrz [1]), z którego otrzymujemy

$$(\mathrm{D}.9_1) \quad (x_C + t)^2 + \frac{a^2}{b^2}\,(y_C + m\,t)^2 = a^2$$

$$(\mathrm{D}.9_2) \quad (x_C - t)^2 + \frac{a^2}{b^2}\,(y_C - m\,t)^2 = a^2 \; .$$

Z równości $(\mathrm{D}.9_1)$ i $(\mathrm{D}.9_2)$, po wykonaniu zaznaczonych działań i odjęciu stronami, otrzymamy równanie

$$(\mathrm{D}.9) \quad 4\,x_C t + 4\,\frac{a^2}{b^2}\,y_C\,m\,t = 0 \, ,$$

które po podzieleniu przez t i uwzględnieniu $m = \dfrac{y_o}{x_o}$

przyjmie postać kanoniczną (opuszczono wskaźnik C)

(D.10) $$\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 0 .$$

Równanie (D.10) jest równaniem prostej równoległej do stycznej w punkcie $P_o\ (x_o, y_o)$, która ma równanie

$$\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} - 1 = 0 .$$

Prosta w równaniu (D.10) jest także równoległa do stycznej w punkcie $P\ (-x_o, -y_o)$, której równanie jest następujące:

$$\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} + 1 = 0 .$$

Widzimy więc, że środki cięciw E_1E_2 równoległych do cięciwy, przechodzącej przez punkty P_oP, leżą na prostej o równaniu (D.10).

Elipsa $E(0,a,b)$ odcina więc na prostej o równaniu (D.10) odcinek, który nazywamy średnicą elipsy sprzężoną z kierunkiem $m = \frac{y_o}{x_o}$.

Zapisując równanie prostej (D.10), na której leży średnica elipsy związana z kierunkiem $m = \frac{y_o}{x_o}$, w postaci kierunkowej

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m}\, x ,$$

widzimy, że średnica związana z kierunkiem m ma współczynnik kierunkowy

$$m_1 = -\frac{b^2}{a^2 m}$$

Jest więc widoczne, że równanie wektorowe prostej, na której leży średnica związana z kierunkiem $m = \frac{y_o}{x_o}$, ma postać

$$\vec{r} = (\vec{i} + m_1 \vec{j})\, t \ ,$$

czyli

$$\vec{r} = \frac{a^2 m \vec{i} - b^2 \vec{j}}{a^2 m}\, t \ .$$

Niech dana będzie średnica związana z kierunkiem $m = \frac{y_o}{x_o}$. A więc prosta, na której leży ta średnica, ma równanie wektorowe

$$\vec{r} = \frac{a^2 m \vec{i} - b^2 \vec{j}}{m^2 m}\, t \ .$$

Rozważmy zbiór cięciw $\breve{E}_1\breve{E}_2$, równoległych do wektora kierunkowego $a^2 m \vec{i} - b^2 \vec{j}$ średnicy, związanej z kierunkiem m. Postępując jak wyżej, otrzymamy, że środki cięciw $\breve{E}_1\breve{E}_2$ leżą na prostej o równaniu analogicznym do równania postaci (D.10), skąd znajdziemy, że współczynnik kierunkowy prostej, na której leżą środki cięciw $\breve{E}_1\breve{E}_2$

$$m_2 = -\frac{b^2}{a^2 m_1} \ .$$

Ale wobec

$$m_1 = -\frac{b^2}{a^2 m} \ ,$$

otrzymamy, że

$$m_2 = \frac{b^2}{a^2\left(-\frac{b^2}{a^2 m}\right)} = m \ .$$

Elipsa E (o,a,b) odcina na prostej odcinek, który nazywamy średnicą sprzężoną z kierunkiem m_1.

Równanie wektorowe tej prostej, na której leży średnica związana z kierunkiem m_1, będzie oczywiście

$$\vec{r} = (\vec{i} + m_2 \vec{j})\, t \text{ , czyli } \vec{r} = (\vec{i} + m \vec{j})\, t \text{ .}$$

Dwie średnice elipsy E(o,a,b) : s_1 związaną z kierunkiem m_1 oraz s_2 związaną z kierunkiem m_2 o tej własności, że

$$m_2 = -\frac{b^2}{a^2 m_1} \text{ ,}$$

nazywać będziemy średnicami sprzężonymi. Oczywiście dla średnic sprzężonych elipsy

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2} \text{ .}$$

Otóż równanie wektorowe średnicy związanej z kierunkiem m_1 będzie

$$\vec{r} = \frac{a^2 m_1 \vec{i} - b^2 \vec{j}}{a^2 m_1}\, t \text{ ,}$$

natomiast równanie średnicy związanej z kierunkiem m_2 będzie

$$\vec{r} = \frac{a^2 m_2 \vec{i} - b^2 \vec{j}}{a^2 m_2}\, t \text{ .}$$

Utwórzmy iloczyn skalarowy wektorów kierunkowych tych średnic, zakładając, że kierunki m_1 i m_2 są sprzężone, czyli że

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2} \text{ .}$$

Otrzymamy

$$\frac{a^2 m_1 \vec{i} - b^2 \vec{j}}{a^2 m_1} \circ \frac{a^2 m_2 \vec{i} - b^2 \vec{j}}{a^2 m_2} = \frac{a^4 m_1 m_2 + b^4}{a^4 m_1 m_2} = 1 + \frac{b^4}{a^4 m_1 m_2} =$$

$$= 1 + \frac{b^4}{a^4\left(-\frac{b^2}{a^2}\right)} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = \varepsilon^2 .$$

Widzimy więc, że zachodzi twierdzenie:

Tw. Iloczyn skalarowy wektorów kierunkowych dwóch średnic sprzężonych jest stały i równy ε^2, gdzie ε oznacza mimośród elipsy $E(O,a,b)$.

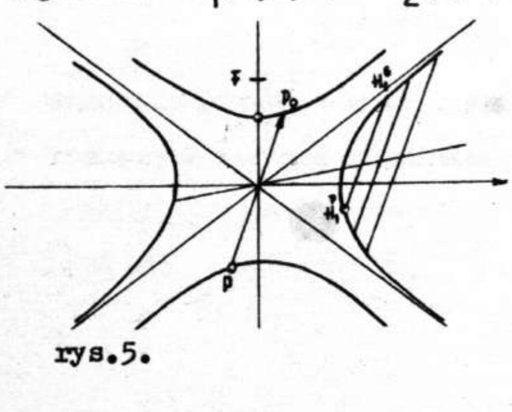
U w a g a. Z własności symetrii elipsy $E(o,a,b)$ wynika, że osie elipsy tworzą jedyną parę średnic ortogonalnych. Te dwie średnice wzajemnie prostopadłe nazywamy także sprzężonymi i określamy mianem osi głównych elipsy $E(O,a,b)$.

Łatwo zauważyć, że średnice elipsy $E(o,a,b)$ tworzą zbiór odcinków, przecinających się we wspólnym punkcie O. Ten wspólny punkt średnic nazywamy środkiem elipsy $E(O,a,b)$.

Aby określić średnice sprzężone hiperboli $H(O,a,b)$, weźmiemy pod uwagę dwie hiperbole: $H_1(O,a,b)$ i $H_2(O,b,a)$ o równaniach

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 .$$

Hiperbole $H_1(O,a,b)$ i $H_2(O,b,a)$ nazywamy sprzężonymi.



rys.5.

Hiperbole sprzężone H_1 i H_2 mają wspólne asymptoty (rys.5). Weźmy na hiperboli sprzężonej $H_2(O,b,a)$ punkt $P_o(x_o,y_o)$, dla którego $x_oy_o \neq 0$ i wektor wodzący punktu P_o $\quad \vec{r}_{P_o} = x_o \vec{i} + \frac{y_o}{x_o} \vec{j}$,

który jest współliniowy z wektorem

$$\vec{a} = \vec{i} + m \vec{j} = 0.$$

Weźmy pod uwagę, podobnie jak dla elipsy, zbiór cięciw równoległych H_1^G H_1^D hiperboli $H_1(0,a,b)$. Otrzymamy, podobnie jak dla elipsy, że wektory wodzące końców H_1^G i H_1^D dowolnej cięciwy H_1^G H_1^D będą równe

$$\vec{r}_{H_1^G} = \vec{r}_C + (\vec{i} + m \vec{j})\, t = (x_C + t)\, \vec{i} + (y_C + mt)\, \vec{j} \ ,$$

$$\vec{r}_{H_1^D} = \vec{r}_C - (\vec{i} + m \vec{j})\, t = (x_C - t)\, \vec{i} + (y_C - mt)\vec{j} \ ,$$

gdzie $t = 0$.

Ale wektory wodzące $\vec{r}_{H_1^G}$ i $\vec{r}_{H_1^D}$ punktów H_1^G i H_1^D hiperboli $H_1(o,a,b)$ spełniają równanie hiperboli (H.2) (patrz [1]) , z którego otrzymujemy

$$(x_C + t)^2 - \frac{a^2}{b^2}\left(y_C + m\, t\right)^2 = a^2$$

$$(x_C - t)^2 - \frac{a^2}{b^2}\left(y_C - mt\right)^2 = a^2 \ .$$

Z tych równości, po wykonaniu zaznaczonych działań i odjęciu stronami, dostaniemy równanie

$$4\, x_C t - 4\, \frac{a^2}{b^2}\, y_C\, mt = 0 \ .$$

Dzieląc przez $4t$ i uwzględniając, że $m = \frac{y_o}{x_o}$, równanie ostatnie można, opuszczając wskaźnik C, zapisać w postaci kanonicznej

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 0. \tag{D.11}$$

Widzimy więc, że środki cięciw H_1^G H_1^D równoległych do cięciwy P_0P, gdzie $P(-x_0,-y_0)$, leżą na prostej o równaniu (D.11). Hiperbola $H_1(0,a,b)$ odcina więc na prostej o równaniu (D.11) odcinek, który nazywać będziemy średnicą hiperboli H_1, związaną z kierunkiem $m = \frac{y_0}{x_0}$.

Pisząc równanie prostej (D.11), na której leży średnica hiperboli H_1 związana z kierunkiem $m = \frac{y_0}{x_0}$ w postaci kierunkowej

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x$$

widzimy, że średnica związana z kierunkiem m ma współczynnik kierunkowy

$$m_1 = \frac{b^2}{a^2 m} .$$

Zatem równanie wektorowe prostej, na której leży średnica związana z kierunkiem $m = \frac{y_0}{x_0}$, ma postać

$$\vec{r} = (\vec{i} + m_1 \vec{j})t ,$$

czyli

$$\vec{r} = \frac{a^2 m \vec{i} + b^2 \vec{j}}{a^2 m} t .$$

Weźmy teraz zbiór cięciw H_2^L H_2^P równoległych do wektora kierunkowego

$$a^2 m \vec{i} + b^2 \vec{j}$$

średnicy związanej z kierunkiem m. Otrzymamy analogicznie, że środki cięciw H_2^L H_2^P leżą na prostej, z której równania znajdziemy jej współczynnik kierunkowy

$$m_2 = \frac{b^2}{a^2 m_1} .$$

Ale wobec $m_1 = \frac{b^2}{a^2 m}$ otrzymamy

$$m_2 = \frac{b^2}{a^2 \frac{b^2}{a^2 m}} = m .$$

Hiperbola $H_2 \left(0,b,a \right)$ odcina na tej prostej odcinek, który nazywać będziemy średnicą hiperboli H_2, związaną z kierunkiem m_1.

Równanie wektorowe tej prostej, na której leży średnica związana z kierunkiem m_1, będzie oczywiście

$$\vec{r} = (\vec{i} + m_2 \vec{j}) t ,$$

czyli

$$\vec{r} = (\vec{i} + m \vec{j})t .$$

Dwie średnice hiperboli $H(0,a,b)$: s_1 związaną z kierunkiem m_1 oraz s_2 związaną z kierunkiem m_2 o tej własności, że

$$m_2 = \frac{b^2}{a^2 m_1}$$

nazywać będziemy średnicami sprzężonymi. Oczywiście dla średnic sprzężonych hiperboli

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{b^2}{a^2} .$$

Styczne w punktach, w których średnica s_1 związana z kierunkiem m_1 przecina hiperbolę, są równoległe do średnicy z nią sprzężonej s_2, czyli związanej z kierunkiem

$$m_2 = \frac{b^2}{a^2 m_1} .$$

Własność ta jest łatwo widoczna, jeżeli równanie stycznej w punkcie P_0 (x_0, y_0) napiszemy w postaci

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

dla której współczynnik kierunkowy

$$m_1 = \frac{b^2}{a^2 \frac{y_0}{x_0}} ,$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{y_0}{x_0} m_1 = \frac{b^2}{a^2} .$$

Równość ta oznacza, że średnica związana z kierunkiem $m = \frac{y_0}{x_0}$ jest średnicą sprzężoną z kierunkiem m_1, czyli średnica ta ma równanie

$$y = \frac{b^2}{a^2 \frac{y_0}{x_0}} x ,$$

czyli

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 0 .$$

Zauważmy dalej, że równanie wektorowe średnicy związanej z kierunkiem m_1 będzie

$$\vec{r} = \frac{a^2 m_1 \vec{i} + b^2 \vec{j}}{a^2 m_1} t ,$$

natomiast równanie wektorowe średnicy związanej z kierunkiem m_2 będzie

$$\vec{r} = \frac{a^2 m_2 \vec{i} + b^2 \vec{j}}{a^2 m_2}\, t\,.$$

Utwórzmy iloczyn skalarowy wektorów kierunkowych tych średnic, zakładając, że kierunki m_1 i m_2 są sprzężone, czyli że $m_1 \cdot m_2 = \frac{b^2}{a^2}$. Otrzymamy

$$\frac{a^2 m_1 \vec{i} + b^2 \vec{j}}{a^2 m_1} \cdot \frac{a^2 m_2 \vec{i} + b^2 \vec{j}}{a^2 m_2} = \frac{a^4 m_1 m_2 + b^4}{a^4 m_1 m_2} = 1 + \frac{b^4}{a^4 m_1 m_2} =$$

$$1 + \frac{b^4}{a^4 \cdot \frac{b^2}{a^2}} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = \varepsilon^2 .$$

Wykazaliśmy więc, że zachodzi twierdzenie:

Tw. Iloczyn skalarowy wektorów kierunkowych dwóch średnic sprzężonych jest stały i równy ε^2, gdzie ε oznacza mimośród hiperboli $H(0,a,b)$.

Uwaga. Podobnie jak dla elipsy, z symetrii hiperboli $H(0,a,b)$ wynika, że osie hiperboli tworzą jedyną parę średnic ortogonalnych. Te dwie średnice wzajemnie prostopadłe nazywamy także sprzężonymi i określamy mianem osi głównych hiperboli $H(0,a,b)$.

Średnice hiperboli $H(0,a,b)$ tworzą zbiór odcinków, przecinających się we wspólnym punkcie 0. Ten wspólny punkt średnic nazywamy środkiem hiperboli $H(0,a,b)$.

Niech będzie dana parabola $P\left(0,-\frac{p}{2}\vec{i}\right)$ (patrz [1]). Weźmy na płaszczyźnie dowolny punkt $P_0(x_0, y_0)$, gdzie $x_0 \cdot y_0 \neq 0$.
Wektor wodzący tego punktu

$$\vec{r} = x_0\left(\vec{i} + \frac{y_0}{x_0}\vec{j}\right)$$

wyznacza więc określony wektor kierunkowy

$$\vec{a} = \vec{i} + m\,\vec{j} \neq 0\ , \quad m = \frac{y_0}{x_0}$$

na płaszczyźnie.

Rozważmy zbiór cięciw paraboli $P\left(0, \frac{p}{2}\vec{i}\right)$, równoległych do wektora kierunkowego $\vec{a}$. Jeżeli przez C oznaczymy środek jakiejkolwiek cięciwy z tego zbioru, to równanie wektorowe tej cięciwy będzie

$$\vec{r} = \vec{r}_C + (\vec{i} + m\,\vec{j})t\ .$$

Natomiast wektory wodzące punktów, w których ta cięciwa przecina parabolę, będą

$$\vec{r}_{P_1} = (x_C + t)\,\vec{i} + (y_C + mt)\,\vec{j}\ ,$$

$$\vec{r}_{P_2} = (x_C - t)\,\vec{i} + (y_C - mt)\,\vec{j}\ .$$

Ale wektor

$$\vec{v} = -2p\,\vec{i} + y_P\,\vec{j}$$

(patrz [1]), czyli dla punktów P_1 i P_2 wektory $\vec{v}_{P_1}$ i $\vec{v}_{P_2}$ będą

$$\vec{v}_P = -2p\,\vec{i} + (y_C \pm mt)\,\vec{j}\ .$$

Zgodnie z definicją paraboli (patrz [1])dla punktów P_1 i P_2 będzie

$$\vec{r}_P \cdot \vec{v}_P = 0 ,$$

$$(x_C + t)(-2p) + (y_C + mt)(y_C + mt) = 0 ,$$
$$(x_C - t)(-2p) + (y_C - mt)(y_C - mt) = 0 .$$

Wykonując zaznaczone działania i odejmując stronami powyższe dwie równości, otrzymamy

$$-4pt + 4y_C mt = 0 ,$$

skąd, opuszczając wskaźnik C ,

$$y = \frac{p}{m} . \tag{D.12}$$

Widzimy więc, że środki cięciw równoległych do wektora $\vec{a} = \vec{i} + m\,\vec{j}$ leżą na prostej o równaniu (D.12) , czyli na prostej równoległej do osi paraboli $P\left(0, \frac{p}{2}\vec{i}\right)$.

Prostą o równaniu (D.12) nazywamy średnicą paraboli $P\left(0, \frac{p}{2}\vec{i}\right)$, związaną z kierunkiem $m = \dfrac{y_o}{x_o}$.

Widzimy z równania (D.12) , że średnice paraboli $P\left(0, \frac{p}{2}\ \vec{i}\right)$ związane z kierunkami m tworzą zbiór prostych równoległych do osi tej paraboli.

W szczególności średnica paraboli związana z kierunkiem m = p ma równanie

$$y = 1 ,$$

z którego widzimy, że odległość tej średnicy od osi paraboli jest równa mimośrodowi paraboli $\mathcal{E} = 1$.

Z równania (D.12) jest także widoczne, że oś paraboli $P\left(0, \frac{p}{2}\vec{i}\right)$ jest średnicą związaną z kierunkiem wyznaczonym przez kierownicę tej paraboli.

Oś paraboli jest jej osią główną.

Uwaga. Parabola jest krzywą stożkową, nie posiadającą środka.

5. Biegunowe stożkowej

Niech będzie dana stożkowa $S(O,a,b)$, mająca środek w punkcie O, o równaniu środkowym, tj. w postaci

$$b^2x^2 + \alpha a^2y^2 - a^2b^2 = 0 , \tag{B.1}$$

gdzie dla $\alpha = -1$ otrzymujemy hiperbolę, natomiast dla $\alpha = 1$ elipsę, a gdy nadto $b = a$ - okrąg.

Rozważmy na stożkowej S dwa punkty: P i Q, nie będące wierzchołkami. Punkty P i Q wyznaczają wektor $\overrightarrow{PQ}$. Na prostej, wyznaczonej przez wektor $\overrightarrow{PQ}$ (rys. 6) rozważmy drugą parę punktów: C i B, które dzielą wektor $\overrightarrow{PQ}$ wewnętrznie i zewnętrznie w danym stosunku λ. Oznacza to, że

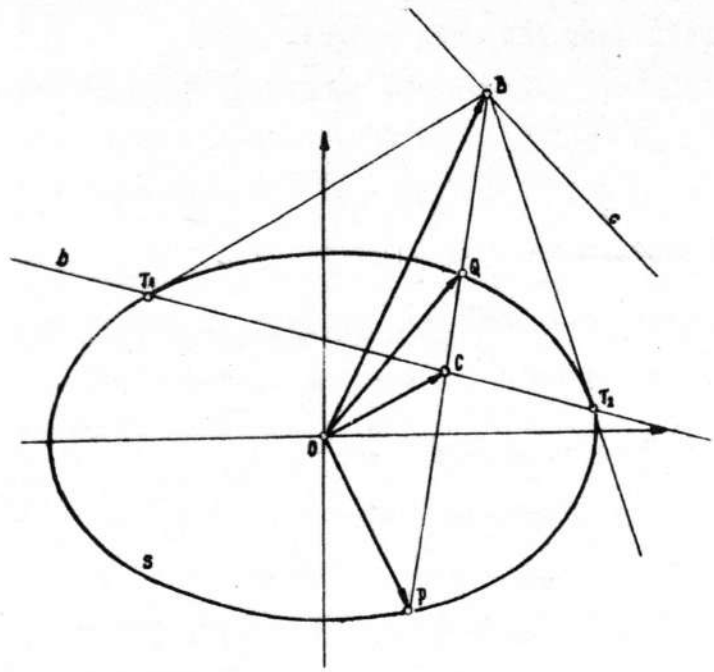
$$\overrightarrow{PC} = \lambda\,\overrightarrow{CQ} \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{PB} = -\lambda\,\overrightarrow{BQ} .$$

Dla współrzędnych punktów podziału C i B wektora $\overrightarrow{PQ}$ otrzymamy wzory

$$x_C = \frac{x_P + \lambda x_Q}{1+\lambda} , \quad y_C = \frac{y_P + \lambda y_Q}{1+\lambda} \tag{B.2}$$

oraz

$$x_B = \frac{x_P - \lambda x_Q}{1-\lambda} , \quad y_B = \frac{y_P - \lambda y_Q}{1-\lambda} . \tag{B.3}$$



rys. 6.

Zakładamy, że punkty C i B nie dzielą wektora $\overrightarrow{PQ}$ odpowiednio w stosunku $\lambda = -1$ oraz $\lambda = +1$.

Utwórzmy, mnożąc równości (B.2) oraz (B.3) odpowiednio stronami, następujące iloczyny:

$$(B.4) \qquad b^2 x_B x_C = b^2 \frac{x_P^2 - \lambda^2 x_Q^2}{1 - \lambda^2}$$

$$(B.5) \qquad \alpha a^2 y_B y_C = \alpha a^2 \frac{y_P^2 - \lambda^2 y_Q^2}{1 - \lambda^2} .$$

Z kolei dodajmy stronami równości (B.4) i (B.5), odejmując obustronnie iloczyn a^2b^2. Otrzymamy

$$b^2 x_B x_C + \alpha a^2 y_B y_C - a^2 b^2 =$$

$$= b^2 \frac{x_P^2 - \lambda^2 x_Q^2}{1-\lambda^2} + a^2 \frac{y_P^2 - \lambda^2 y_Q^2}{1-\lambda^2} - \frac{a^2b^2(1-\lambda^2)}{1-\lambda^2} .$$

Łatwo zauważymy, że

$$b^2 x_B x_C + \alpha a^2 y_B y_C - a^2 b^2 = \tag{B.6}$$

$$= \frac{(b^2x_P^2 + \alpha a^2 y_P^2 - a^2b^2) - \lambda^2(b^2x_Q^2 + \alpha a^2 y_Q^2 - a^2b^2)}{1-\lambda^2}$$

Punkty P i Q leżą na stożkowej S, czyli współrzędne punktów P i Q spełniają równanie środkowe stożkowej S. Oznacza to, że licznik ułamka po prawej stronie równości (B.6) jest równy zeru. Równość (B.6) dla $\lambda = \pm 1$ przyjmuje więc postać

$$b^2 x_B x_C + \alpha a^2 y_B y_C - a^2 b^2 = 0 . \tag{B.7}$$

Jeżeli punkty P i Q będą zmieniały położenie na stożkowej S w taki sposób, że zbiór prostych, wyznaczonych przez wektory $\overrightarrow{PQ}$, będzie miał wspólny stały punkt B, to punkt C będzie zmieniał swe położenie tak, że współrzędne x_C, y_C będą spełniały równość (B.7) . Oznacza to, że punkt C będzie się poruszał po linii prostej o równaniu

$$\frac{x_B x}{a^2} + \alpha \frac{y_B y}{b^2} = 1 , \tag{B.8}$$

które otrzymuje się, po przekształceniu, z równania (B.7), opuszczając wskaźnik C.

Prostą o równaniu (B.8) nazywamy biegunową punktu B względem stożkowej S , a punkt $B(x_B, y_B)$ biegunem tej prostej.

Widać, że biegunowa, której biegun $B(x_0, y_0)$

leży na stożkowej S, jest styczną do tej stożkowej w punkcie B.

Jeżeli biegun $B(x_B, y_B)$ leży na zewnątrz stożkowej S, to przez punkt B można poprowadzić dwie styczne do stożkowej S w punktach $T_i(x_{T_i}, y_{T_i})$; $(i = 1, 2)$. Równanie stycznej w punkcie T_i do stożkowej S będzie

$$b^2 x_{T_i} x + \alpha a^2 y_{T_i} y - a^2 b^2 = 0 .$$

Do tej stycznej należy biegun $B(x_B, y_B)$, co oznacza, że spełnione jest równanie

$$b^2 x_{T_i} x_B + a^2 y_{T_i} y_B - a^2 b^2 = 0 .$$

Widać więc, że współrzędne punktów styczności T_i spełniają równanie biegunowej

$$\frac{x_B x}{a^2} + \alpha \frac{y_B y}{b^2} = 1 ,$$

której biegunem jest punkt $B(x_B, y_B)$. Oznacza to, że biegunowa punktu B, położonego na zewnątrz stożkowej S, przechodzi przez te same punkty T_i stożkowej S, przez które przechodzą odpowiednio styczne (t_1) i (t_2), wyprowadzone z bieguna B do stożkowej S.

Niech dany będzie biegun $B(x_B, y_B)$ i równanie jego biegunowej w postaci

$$b^2 x_B x + \alpha a^2 y_B y - a^2 b^2 = 0 .$$

Załóżmy, że biegun $B(x_B, y_B)$ oddala się w nieskończoność po średnicy stożkowej S, związanej z danym kierunkiem

$$m = \frac{y_B}{x_B} \quad .$$

Przekształćmy wyżej napisane równania biegunowych poruszającego się bieguna B następująco:

$$b^2x + \alpha a^2 \frac{y_B}{x_B} = 0 \quad ,$$

gdzie oczywiście $x_B \neq 0$, gdyż z założenia biegun B oddala się od punktu O. Powyższą równość możemy napisać w postaci

$$(B.9) \qquad b^2x + \alpha a^2my - \frac{a^2b^2}{x_B} = 0 \; .$$

Gdy punkt B po średnicy stożkowej S, związanej z kierunkiem m, oddali się w nieskończaoność, to równanie (B.9) przyjmie postać graniczną

$$b^2x + \alpha a^2my - 0 = 0 \; .$$

Zapisując to równanie w postaci

$$y = \frac{-1}{\alpha} \; \frac{b^2}{a^2m} \; x \quad ,$$

widzimy, że jest to równanie prostej, na której jest położona średnica sprzężona do średnicy związanej z kierunkiem m.

A więc, gdy biegun B oddala się w nieskończoność po prostej, na której leży średnica stożkowej S, związana z kierunkiem danym m, to biegunowa dąży do prostej, na której leży średnica sprzężona ze średnicą związaną z kierunkiem m.

Jeżeli biegun b leży na zewnątrz stożkowej s, to biegunowa punktu B przecina stożkową S. Gdy biegun B leży wewnątrz stożkowej S, to biegunowa punktu B nie przecina stożkowej S.

Niech będzie dany biegun $B\,(x_B,\ y_B)$ i jego biegunowa (b) o równaniu

$$b^2x_Bx + \alpha a^2y_By - a^2b^2 = 0 .$$

Obierzmy na biegunowej (b) punktu B dowolny punkt $C\,(x_C,y_C)$. Oznacza to, że spełnione jest równanie

$$(B.10) \qquad b^2x_Bx_C + \alpha a^2y_By_C - a^2b^2 = 0 .$$

Weźmy z kolei pod uwagę biegunową (c) tegoż punktu C . Ma ona równanie

$$b^2x_Cx + \alpha a^2y_Cy - a^2b^2 = 0 .$$

Ale natychmiast z równości B.10 widać, że biegun $B(x_B,y_B)$ jest położony na biegunowej (c) punktu C .
Zachodzi więc twierdzenie.

Tw. Biegunowa (c) punktu $C\,(x_C,y_C)$, położonego na biegunowej (b) punktu $B\,(x_B,y_B)$ przechodzi przez biegun B i na odwrót, tzn. biegunowa (b) punktu B przechodzi przez biegun C biegunowej (c), na której leży biegun B prostej (b) .

Uwaga. Biegunowa, której biegun B oddalił się w nieskończoność, przechodzi przez środek O stożkowej $S\,(O,a,b)$. Natomiast, gdy biegun B zbliża się do środka O stożkowej $S\,(o,a,b)$, jego biegunowa oddala się w nieskończoność. Można powiedzieć, że biegunową środka jest prosta w nieskończoności.

Niech będzie dany biegun $B(x_B,y_B)$ względem stożkowej $S\,(O,a,b)$, położony wewnątrz stożkowej S. Jego biegunowa ma więc równanie

$$b^2x_Bx + \alpha a^2y_By - a^2b^2 = 0 .$$

Jeżeli biegun $B(x_B, y_B)$ porusza się, dążąc do położenia punktu $C_i(c_i, 0)$, który jest jednym z ognisk $(i = 1, 2.)$ stożkowej $S(0,a,b)$, to równanie biegunowej przyjmuje następującą postać graniczną:

$$b^2c_ix + \alpha a^2 \cdot 0 \cdot y - a^2b^2 = 0 ,$$

skąd otrzymujemy równanie biegunowej ogniska $C_i(c_i, 0)$, $(i = 1,2)$ w postaci

$$b^2c_ix - a^2b^2 = 0,$$

czyli $x = \frac{a^2}{c_i}$ lub $x = \frac{a}{\frac{c_i}{a}}$, skąd ostatecznie

(B.11) $$x = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a}{\varepsilon} , \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \pm 1 .$$

Wobec (B.11) możemy powiedzieć, że biegunową ogniska jest odpowiednia kierownica stożkowej $S(0,a,b)$.

Niech dana będzie parabola $P_K(0, -\frac{p}{2}\vec{i})$ o równaniu

(B.12) $$y^2 - 2px = 0 .$$

Niech wektor $\overrightarrow{PQ}$ wyznaczają dwa dowolne punkty paraboli P_K i niech punkty C i B dzielą wektor $\overrightarrow{PQ}$ wewnętrznie i zewnętrznie w danym stosunku λ, czyli że

$$\overrightarrow{PC} = \lambda\,\overrightarrow{CQ} \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{PB} = -\lambda\,\overrightarrow{BQ}\,.$$

Dla współrzędnych punktów podziału C i B otrzymamy wzory analogiczne do (B.2) oraz (B.3), przy czym zakładamy wówczas, że $\lambda = \pm 1$.

Utwórzmy za pomocą równości (B.2) i (B.3), mnożąc rzędne oraz dodając odcięte, następujące wyrażenia:

$$y_B y_C = \frac{y_P^2 - \lambda^2 y_Q^2}{1-\lambda^2}$$

$$p\,(x_C + x_B) = p\,\frac{(x_P + \lambda x_Q)(1-\lambda) + (x_P - \lambda x_Q)\,(1+\lambda)}{1-\lambda^2}\,.$$

Odejmując powyższe dwie równości stronami i przekształcając prawą stronę, otrzymamy

$$\text{(B.13)} \quad y_B y_C - p\,(x_C + x_B) = \frac{(y_P^2 - 2px_P) - \lambda^2 (y_Q^2 - 2px_Q)}{1-\lambda^2}\,.$$

Punkty P i Q leżą na paraboli P_K, przeto współrzędne tych punktów spełniają równanie (B. 12), skąd wynika, że prawa strona ułamka w równości (B,13) ma licznik równy zeru, jeżeli tylko $\lambda = \pm 1$. Równość (B.13) przyjmie więc postać

$$\text{(B.14)} \quad y_B y_C - p(x_C + x_B) = 0\,.$$

Jeżeli punkty P i Q będą zmieniały położenie na paraboli P_K, w taki sposób, że zbiór prostych, wyznaczonych przez wektory $\overrightarrow{PQ}$, będzie miał wspólny stały punkt B, to punkt C będzie zmieniał swe położenie tak, że współrzędne x_C, y_C będą spełniały równanie (B.14). Oznacza to, że punkt C będzie się poruszał po linii prostej o równaniu

(B.15) $\quad y_B y = p\,(x + x_B)$,

gdzie opuszczono wskaźnik punktu C .

Prostą o równaniu (B.15) nazywamy biegunową punktu B względem paraboli $P\left(0, \frac{p}{2}\vec{i}\right)$, a punkt $B(x_b, y_B)$ - biegunem tej prostej.

Widać też, że biegunowa, której biegun $B(x_0, y_0)$ leży na paraboli P_K jest styczną do tej paraboli w punkcie $B(x_0, y_0)$.

Zachodzi także twierdzenie:

Tw. Jeżeli biegun leży na zewnątrz paraboli P_K, to biegunowa przecina parabolę. Gdy natomiast biegun leży wewnątrz paraboli P_K, to biegunowa paraboli nie przecina.

Załóżmy, że biegun $B(x_B, y_B)$ oddala się w nieskończoność po prostej o danym kierunku $m = \frac{y_B}{x_B}$.

Przekształcamy równanie biegunowej (B.15) dla tego bieguna następująco:

$$\frac{y_B}{x_B}\,y = \frac{px}{x_B} + p \quad .$$

Powyższą równość wobec $m = \frac{y_B}{x_B}$ możemy napisać w postaci

$$my = p + \frac{px}{x_B} \quad .$$

Gdy biegun B oddala się w nieskończoność po prostej o kierunku m , to ostatnia równość przyjmie postać graniczną następującą:

$$m\,y = p \ ,$$

skąd natychmiast otrzymujemy równanie

$$y = \frac{p}{m} ,$$

które oznacza, że biegunowa przyjmuje położenie prostej, na której leży średnica paraboli P_K, związana z kierunkiem m .

Jeżeli natomiast biegun $B(x_B, y_B)$ dąży do położenia punktu $C(\frac{p}{2}, 0)$, który jest ogniskiem paraboli P_K, to z równania (B.15) otrzymujemy równanie

$$0 = p(x + \frac{p}{2}) ,$$

a stąd równanie biegunowej punktu C w postaci

$$x = -\frac{p}{2} .$$

Widzimy więc, że biegunową ogniska paraboli $P_K(O, \frac{p}{2}\vec{i})$ jest jej kierownica.

Bibliografia.

1 . Tadeusz Marian Jędryka,
O konstrukcjach i właściwościach stożkowych.
Matematyka.Czasop.dla nauczycieli Nr 3.
str.153-172. WSiP p.współudz.PTM.W-a 1976.

2 . Franciszek Leja,
Geometria analityczna. PWN. W-a 1954.