

MARIAN STANCZAK  
WSP w Bydgoszczy

POSTAĆ SIŁ UOGÓLNIONYCH OD ENERGII KINETYCZNEJ MECHANIZMÓW  
WIELOKORBOWYCH, WYRAŻONA POJEDYNCZYMI SZEREGAMI FOURIERA

1. Wstęp

W badaniach dynamiki mechanizmów wielokorbowych podstawowym zadaniem jest wyznaczenie ruchu układu wielokorbowego, tj. znalezienie równań ruchu i ich rozwiązanie.

Spośród znanych i stosowanych w dotychczasowej praktyce inżynierskiej metod otrzymywania równań ruchu mechanizmów korbowych [1], najbardziej użyteczna w kompleksowej analizie dynamicznej mechanizmów wielokorbowych wydaje się konstrukcja równań ruchu mechanizmów sposobem analitycznym, przy wykorzystaniu równań Lagrange'a II rodzaju [2]. Siły zewnętrzne i wewnętrzne działające na człony układu ruchomego wprowadza się do równań dynamicznych Lagrange'a pod postacią sił uogólnionych, uzależnionych od współrzędnych uogólnionych rozważanego układu.

Przy rozpatrywaniu dynamiki silników tłokowych wielocylindrowych, szybkoobrotowych za istotny dla ruchu układu wielokorbowego uważać należy, poza działaniem czynnika roboczego wymuszającego ruch układu, wpływ m.in. energii kinetycznej układu [3]. /To samo dotyczy szybkoobrotowych tłokowych maszyn roboczych/. Dla wyznaczenia równań ruchu mechanizmów wielokorbowych równaniami Lagrange'a II rodzaju, koniecznym staje się poszukiwanie również sił uogólnionych pochodzących od energii kinetycznej mechanizmów.

W literaturze nie spotkano jednak /poza [4] / zwartych, ogólnych wzorów analitycznych, określających energię kinetyczną i siły uogólnione od energii kinetycznej dla dowolnych regularnych mechanizmów jedno i wielokorbowych. W zastosowanym w [3] analityczno-graficznym sposobie znajdowania równań ruchu mechanizmów korbowych metodą bilansu mocy otrzymano wzór na energię kinetyczną mechanizmu jednokorbowego w postaci szeregu Fouriera.

Uwzględniany w równaniu bilansu mocy dla mechanizmu jednokorbowego moment obrotowy od energii kinetycznej mechanizmu, wyznaczano poprzez graficzne różniczkowanie krzywej przebiegu zmiennego masowego momentu bezwładności mechanizmu lub w sposób analityczny, przez różniczkowanie szeregu Fouriera. Przy różniczkowaniu analitycznym pewne człony szeregu opuszczano, a po zróżniczkowaniu opuszczano jeszcze człony zawierające przyspieszenie kątowe, przez co wzory na moment obrotowy od energii kinetycznej dla mechanizmu jednokorbowego otrzymano mniej lub bardziej przybliżone. Rozważań analitycznych nad energią kinetyczną i momentem obrotowym od energii kinetycznej nie rozciągnięto na zagadnienie ruchu maszyn wielocylindrowych. Dla wyznaczenia sumarycznej energii kinetycznej i pochodzącego od niej momentu obrotowego dla regularnego mechanizmu wielokorbowego o ilości  $k$  wykorbień, stosowano żmudną i niedokładną metodę  $k$  krotnego graficznego składania wykresów przebiegu odpowiednio energii kinetycznej i momentu obrotowego od energii kinetycznej, otrzymanych dla mechanizmu jednokorbowego, wydzielonego myślowo z układu wielokorbowego.

## 2. Sformułowanie zagadnienia

Celem pracy było wyznaczenie energii kinetycznej mechanizmów wielokorbowych w ich ruchu pod obciążeniem sił zewnętrznych, znalezienie siły uogólnionej pochodzącej od energii kinetycznej takich mechanizmów i wyrażenie jej ścisłym wzorem wygodnym przy operacjach na modelu matematycznym dynamiki układu.

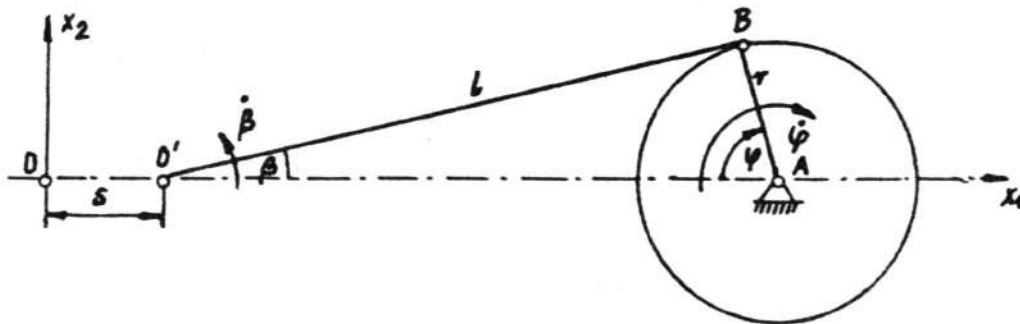
Rozpatrzono mechanizmy wielokorbowe maszyn tłokowych jednostronnego działania, regularne, o układzie korbowym złożonym z rozdzielonych myślowo  $k$  identycznych mechanizmów jednokorbowych o wspólnym wale, przesuniętych względem siebie o kąt wynikający z następstwa pracy poszczególnych wykorbień. Rozważane układy korbowe mają jeden stopień swobody względem zespołu obudowy mechanizmu, a więzami /skleronomicznymi/ są tuleje cylindrowe i łożyska główne wału. Kąt  $\varphi$  obrotu korby /jako ogniwa głównego/ przyjęto za współrzędną uogólnioną układu.

W rozważaniach założono nieodkształcalność ogniw mechanizmów, oraz pomijano luzy w parach kinematycznych ogniw. Nie zajmowano

się stanami przejściowymi ruchu mechanizmów, lecz tzw. ruchem okresowego quasiustalonym [1].

### 3. Energia kinetyczna mechanizmów jedno i wielokorbowych

Omówiona zostanie najpierw kinematyka mechanizmu jednokorbowego [3, 5] /Rys. 1/, w zakresie potrzebnym do dokonania analizy energetycznej mechanizmów jedno i wielokorbowych.



Rys. 1. Kinematyka mechanizmu jednokorbowego

Mechanizm wykonuje ruch płaski w płaszczyźnie Rys. 1; oś wału A jest prostopadła do płaszczyzny rysunku. Ramię korby jest  $r$ , długość korbowa  $l$ , punkt  $O'$  jest śladem osi sworznia tłokowego w położeniu określonym przesunięciem tłoka  $s$ , kąt obrotu  $\varphi(t)$  korby /ogniwa głównego/ jest współzrzedną uogólnioną określającą jednoznacznie położenie członów mechanizmu w chwili  $t$ .

W dowolnym położeniu korby określonym współzrzedną  $\varphi$ , położenie tłoka wynosi:

$$(3.1) \quad s = r + l - l \cos \beta - r \cos \varphi.$$

Wykorzystując we wzorze (3.1) stosunek korbowy  $\frac{r}{l} = \lambda$  oraz warunek geometryczny:

$$(3.2) \quad l \sin \beta = r \sin \varphi$$

otrzymano:

$$(3.3) \quad s = r \left[ 1 - \cos \varphi + \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \right) \right].$$

Prędkość tłka przedstawia zależność:

$$(3.4) \quad \dot{s} = r \dot{\varphi} \sin \varphi \left( 1 + \frac{\lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \right); \quad \dot{s} = \frac{ds}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt},$$

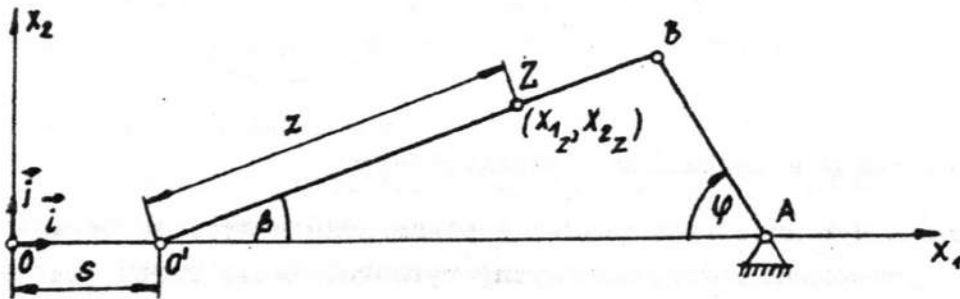
$$(\cdot) = \frac{d}{dt},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega(\varphi).$$

Chwilową prędkość kątową korbowodu  $\dot{\beta}$  otrzymano z obustronnego różniczkowania zależności (3.2)

$$(3.5) \quad \dot{\beta} = \frac{\lambda \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Ruch płaski korbowodu określają kinematyczne równania ruchu dowolnego punktu Z korbowodu /Rys. 2/, które wyrażono we współrzędnych kartezjańskich  $(x_1, x_2)$ :



Rys. 2. Ruch płaski korbowodu

$$x_{1z}(t) = s + z \cos \beta, \quad x_{2z}(t) = z \sin \beta.$$

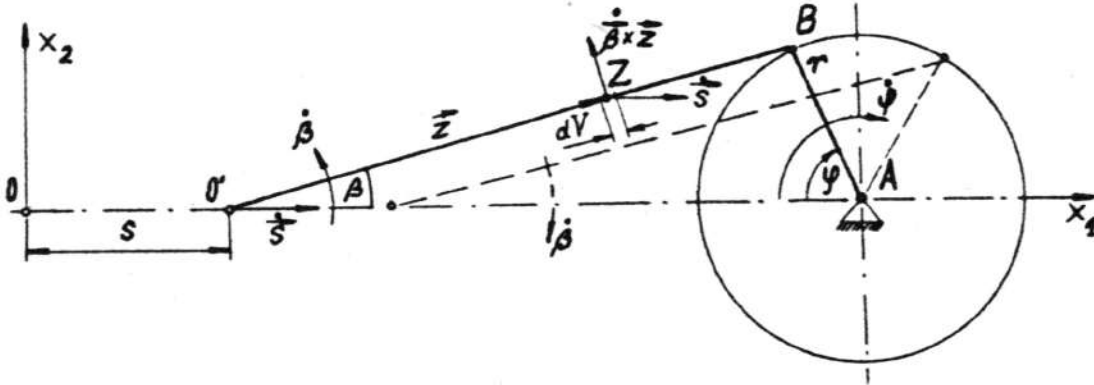
Prędkość dowolnego punktu Z korbowodu wynosi /patrz Rys. 3/ :

$$\vec{v}_z = \dot{\vec{s}} + (\dot{\beta} \times \vec{z}) = \vec{i} \dot{x}_{1z}(t) + \vec{j} \dot{x}_{2z}(t) = \vec{i}(\dot{s} - \dot{\beta} z \sin \beta) + \vec{j} \dot{\beta} z \cos \beta,$$

a moduł prędkości  $v_z$  jest:

$$(3.6) \quad v_z = \sqrt{(\dot{x}_{1z})^2 + (\dot{x}_{2z})^2} = \sqrt{\dot{s}^2 - 2\dot{s}\dot{\beta}z \lambda \sin \varphi + \dot{\beta}^2 z^2}.$$

Energia kinetyczna całego układu jednokorbowego /Rys. 3/ wynosi:



Rys. 3. Energia kinetyczna całego układu korbowego

$$(3.7) \quad E = \frac{1}{2} m_o \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \int_V \rho v_z^2 dV + \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 .$$

Tutaj  $m_o$  oznacza masę tłoka kompletnego,  $\rho$  gęstość materiału korbowa,  $v_z$  prędkość dowolnego punktu Z korbowa/według wzoru (3.6) /,  $dV$  elementarną objętość korbowa.  $I_A = I_w + I_z$ , gdzie  $I_w$  to moment bezwładności wału wraz z elementami osadzonymi na wale i obracającymi się wraz z nim,  $I_z$  to moment bezwładności koła zamachowego. Poszczególne człony wzoru (3.7) określają:

$\frac{1}{2} m_o \dot{s}^2$  - energię ruchu postępowego tłoka,

$\frac{1}{2} \int_V \rho v_z^2 dV$  - energię kinetyczną korbowa  $E_k$ ,

$\frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2$  - energię kinetyczną koła zamachowego wraz z wałem i korbą.

Po uwzględnieniu prędkości  $v_z$  (3.6), energię kinetyczną korbowodu  $E_k$  przedstawia zależność:

$$(3.8) \quad E_k = \frac{1}{2} m_k \dot{s}^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\beta}^2 - S_o \dot{s} \dot{\beta} \lambda \sin \varphi ,$$

przy czym:

$I_o = \int_V \rho z^2 dV$  - jest momentem bezwładności korbowodu względem osi sworznia tłokowego,

$S_o = \int_V \rho z dV$  - jest momentem statycznym korbowodu,

$m_k = \rho V$  - jest masą korbowodu.

Energia kinetyczna korbowodu zależy od dwóch wielkości kinematycznych  $\dot{s}$  i  $\dot{\beta}$ . Przeprowadzona analiza poprawności znaku przy trzecim członie wzoru (3.8) na  $E_k$  wskazuje, by do wzoru (3.7) za wielkości  $\dot{s}, \dot{\beta}$  nie podstawić wartości bezwzględnych i uwzględnić znak wyrażenia  $\sin \varphi$ .

Po wykorzystaniu (3.4) i (3.5), i po oczywistych przekształceniach wzór (3.8) sprowadzono do postaci:

$$(3.9) \quad E_k = \dot{\varphi}^2 \left[ \frac{1}{2} m_k r^2 \sin^2 \varphi \left( 1 + \frac{2 \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \right) + \frac{1}{2} I_o \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} + S_o r \lambda^2 \left( \frac{\sin 2\varphi \sin \varphi}{2 \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{\lambda \sin^2 2\varphi}{4 (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)} \right) \right].$$

Energję kinetyczną mechanizmu jednokorbowego określoną wzorem (3.7) zapisano krótko w postaci bezwymiarowej:

$$(3.10) \quad E^* = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^{*2} J(\varphi) ,$$

gdzie oznaczono:

$$E^* = \frac{E}{I_w \omega_{sr}^2} ,$$

$$(3.11) \quad J(\varphi) = 1 + J_z + J_m \sin^2 \varphi + \frac{\lambda (J_m - \lambda J_o^*) \sin 2\varphi \sin \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{\lambda^2 [(J_m - 2 \lambda J_o^*) \sin^2 2\varphi + 4 J_o^* \cos^2 \varphi]}{4 (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)} .$$

Przyjęto tu bezwymiarową zmienną prędkość kątową:

$$(3.12) \quad \dot{\psi}^* = \frac{\dot{\psi}}{\omega_{\dot{s}r}} ,$$

przy czym  $\omega_{\dot{s}r}$  to przybliżona średnia prędkość kątowa mechanizmu /np. prędkość nominalna  $\omega_{\dot{s}r} = \frac{\pi n}{30}$ ; n - liczba obrotów korby/.

Wprowadzono parametry bezwymiarowe:

$$(3.13) \quad \frac{mr^2}{I_w} = J_m, \quad \frac{I_{o'}}{I_w} = J_o, \quad \frac{rs_{o'}}{I_w} = J_{o'}^*, \quad \frac{I_z}{I_w} = J_z .$$

Tutaj  $m = m_{o'} + m_k$ , to suma mas tłoka i korbowodu.

Dla zapewnienia równomiernej pracy maszyny tłokowej cykle robocze poszczególnych wykorbień mechanizmu wielokorbowego przesunięte są względem siebie równomiernie o jednakowy kąt fazowy  $\alpha'$ , niezależny od układu cylindrów maszyny. W maszynach o obiegu dwusuwowym i czterosuwowym kąt  $\alpha'$  wynosi odpowiednio:

$$(3.14) \quad \alpha'^{(1)} = \frac{T}{k} \quad \text{dla maszyn jednostronnego działania ,}$$

$$(3.15) \quad \alpha'^{(2)} = \frac{T}{2k} \quad \text{dla maszyn dwustronnego działania.}$$

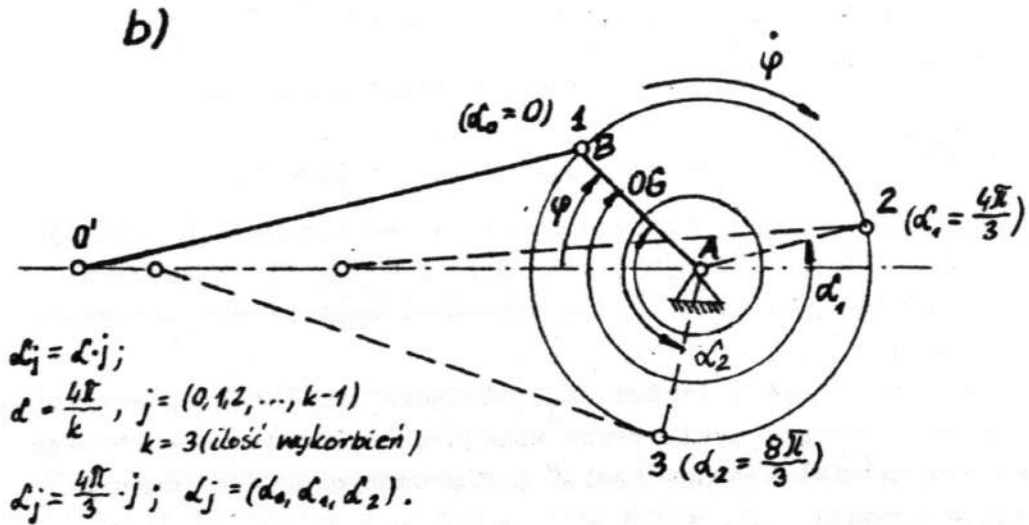
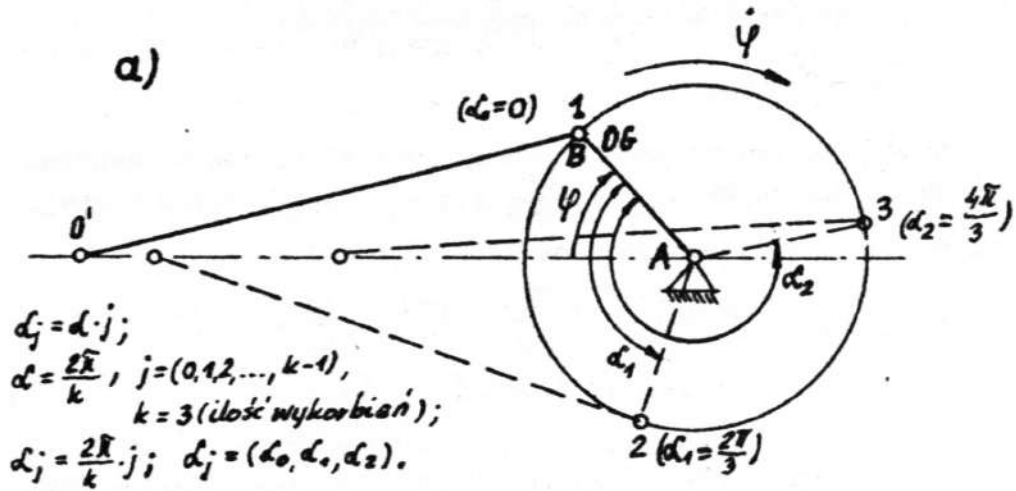
Tu  $k = (1, 2, \dots, 12)$ . Obecnie w praktyce technicznej [6] stosuje się maszyny tłokowe o liczbie wykorbień  $k = 2 \div 12$ . W naszych rozważaniach przyjęto max liczbę wykorbień mechanizmów wielokorbowych  $k = 12$ .

Kątowe przesunięcia fazowe  $\alpha_j$ , względem współrzędnej uogólnionej ogniwa głównego, cykli pracy kolejnych wykorbień k korbowego mechanizmu są wielokrotnościami  $\alpha'$  i dla maszyn jednostronnego działania wynoszą  $\alpha_j = \alpha' \cdot j$ ;

$$(3.16) \quad \alpha_j = \frac{T}{k} j ; \quad j = (0, 1, 2, \dots, k-1) ,$$

T - okres cyklu pracy mechanizmu.

Dla prowadzonych rozważań nie jest istotna kolejność pracy wykorbień mechanizmów wielokorbowych. Na Rys. 4. przykładowo podano kątowe przesunięcia fazowe  $\alpha_j$  pracy wykorbień mechanizmu trzykorbowego.



Rys. 4. Schemat rozkładu cykli pracy wykorbień mechanizmu trzykorbowego rzędowego, a/ dwusuwowego, b/ czterosuwowego

Oznaczenia:

OG - wykorbienie przyjęte za ogniwo główne

$L_j$  - katowe przesunięcie fazowe cykli roboczych poszczególnych wykorbień względem ogniwa głównego

wg następstwa pracy /1, 2, 3/ kolejnych wykorbień



Prędkości, przyspieszenia i siły dla mechanizmów wielokorbowych oblicza się tak samo jak dla mechanizmu jednokorbowego z tym, że nie zmieniając wartości, wielkości te są przesunięte względem siebie o kątowne przesunięcie fazowe  $\alpha_j$  wynikające z następstwa pracy wykorbień.

Energia kinetyczna  $E_w^*$  układu k korbowego jest sumą energii ruchu poszczególnych rozdzielonych myślowo mechanizmów jednokorbowych tego układu (3.10), przesuniętych względem ogniwa głównego o  $\alpha_j$  i wynosi:

$$(3.17) \quad E_w^* = \sum_{j=0}^{k-1} E_j^*$$

gdzie:

$k = (1, 2, \dots, 12)$ ; max ilość wykorbień mechanizmu przyjęto  $k = 12$ ,  
 $j = (0, 1, 2, \dots, k-1)$ ,

$$(3.18) \quad E_j^* = E^*(\varphi + \alpha_j) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^{*2} [1 + J_z + J_j(\varphi)],$$

a  $J_j(\varphi)$  jest oznaczeniem skracającym

$$(3.19) \quad J_j(\varphi) = J_m \sin^2(\varphi + \alpha_j) + \frac{\lambda (J_m - \lambda J_o^*) \sin 2(\varphi + \alpha_j) \sin(\varphi + \alpha_j)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi + \alpha_j)}} + \\ + \frac{\lambda^2 [(J_m - 2\lambda J_o^*) \sin^2 2(\varphi + \alpha_j) + 4J_o^* \cos^2(\varphi + \alpha_j)]}{4 [1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi + \alpha_j)]}.$$

Ostatecznie energia kinetyczna mechanizmów wielokorbowych o dowolnej liczbie k wykorbień wynosi:

$$(3.20) \quad E_w^* = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^{*2} \left[ 1 + J_z + \sum_{j=0}^{k-1} J_j(\varphi) \right].$$

#### 4. Siła uogólniona od energii kinetycznej w ruchu mechanizmów wielokorbowych

Dla wyprowadzenia równań ruchu mechanizmów korzysta się z równań Lagrange'a II rodzaju dla układów dyssypacyjnych [2,7]

$$(4.1) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1} = Q_{z_1} + Q_{r_1},$$

gdzie: E to energia kinetyczna mechanizmu, U - energia potencjal-

na siłę ciężkości układu,  $q_1$  - współrzędna uogólniona,  $\dot{q}_1$  - prędkość uogólniona,  $Q_{z_l}$  - siła uogólniona od obciążeń zewnętrznych, odpowiadająca uogólnionej współrzędnej  $q_1$ ,  $Q_{r_1}$  - siła dyssypacyjna układu,  $l$  - liczba stopni swobody.

Siła uogólniona od energii kinetycznej odpowiadająca uogólnionej współrzędnej  $q_1$  wynosi:

$$(4.2) \quad Q_{E_1} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_1}.$$

Dla rozważanych układów wielokorbowych o jednym stopniu swobody i jednej współrzędnej uogólnionej  $\varphi / q_1 = \varphi$ , siłę uogólnioną  $Q_E$  od energii kinetycznej wyrazi zależność:

$$(4.3) \quad Q_E = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi}.$$

Wstawiając do wzoru (4.3) wyznaczoną dla mechanizmów wielokorbowych energię kinetyczną (3.20) /zależną od mas ich ogniw i prędkości oraz od położenia ogniwa głównego/, oraz wykonując odpowiednie operacje różniczkowania, otrzymano we współrzędnej uogólnionej siłę uogólnioną od energii kinetycznej mechanizmów wielokorbowych w następującej postaci bezwymiarowej:

$$(4.4) \quad Q_{E_w}^* (\varphi) = \ddot{\varphi}^* f_{o_k} (\varphi) + \dot{\varphi}^{*2} f_{1_k} (\varphi),$$

gdzie:  $\ddot{\varphi}^* = \frac{\ddot{\varphi}}{\omega^2 \delta r}$  - to bezwymiarowe przyspieszenie kątowe, a

$$f_{o_k} (\varphi) = 1 + J_2 + \sum_{j=0}^{k-1} J_j (\varphi) ; \quad j = (0, 1, 2, \dots, k-1),$$

$$(4.5) \quad f_{1_k} (\varphi) = \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \frac{1}{2} J_m \sin 2(\varphi + \alpha_j) + \frac{\lambda (J_m - \lambda J_{o_j}^*) [3 \sin 3(\varphi + \alpha_j) - \sin(\varphi + \alpha_j)]}{4 \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi + \alpha_j)}} + \frac{\lambda^2 [(J_m - 2 \lambda J_{o_j}^*) \sin 4(\varphi + \alpha_j) - 2 J_{o_j}^* \sin 2(\varphi + \alpha_j)]}{4 [1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi + \alpha_j)]} - \frac{\lambda^3 (J_m - \lambda J_{o_j}^*) \sin^2 2(\varphi + \alpha_j) \sin(\varphi + \alpha_j)}{4 [1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi + \alpha_j)]^{3/2}} \right\}$$

$$(4.5 \text{ c.d.}) = \frac{\lambda^4 [(J_m - 2\lambda J_o^*) \sin^3 2(\varphi + \alpha_j) + 4J_o^* \sin 2(\varphi + \alpha_j) \cdot \cos^2(\varphi + \alpha_j)]}{8 [1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi + \alpha_j)]^2} \left. \vphantom{\frac{\lambda^4 [(J_m - 2\lambda J_o^*) \sin^3 2(\varphi + \alpha_j) + 4J_o^* \sin 2(\varphi + \alpha_j) \cdot \cos^2(\varphi + \alpha_j)]}{8 [1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi + \alpha_j)]^2}} \right\}.$$

Uwzględniając, że  $\lambda$  jest liczbą małą /stosunek korbowy  $\lambda \ll 1$ ;  $0,17 \leq \lambda \leq 0,4$ , [6] /, rozwinięto wyrażenia:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi + \alpha_j)}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi + \alpha_j)} \quad \text{ze wzorów (3.20)}$$

i (4.4) na szeregi potęgowe ze względu na  $\lambda^2 \sin^2(\varphi + \alpha_j)$ , [8] i otrzymane wyrażenia rozwinięto w szeregi trygonometryczne /Fouriera, [9] wzór (1.320.1) /.

Po wykonaniu odpowiednich działań otrzymano siłę uogólnioną od energii kinetycznej mechanizmów wielokorbowych w postaci:

$$(4.6) \quad Q_{B_w}^*(\varphi) = \ddot{\varphi}^* I_1(\varphi) + \dot{\varphi}^{*2} I_2(\varphi),$$

gdzie oznaczono:

$$I_1(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \sum_{j=0}^{k-1} \cos n(\varphi + \alpha_j),$$

$$I_2(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n \sum_{j=0}^{k-1} \sin n(\varphi + \alpha_j); \quad n = (0, 1, 2, \dots),$$

$$K_0 = \frac{1}{k} + \frac{J}{k^2} + J_m C_0 - J_o^* D_0 + J_o \Omega_0, \quad K_1 = J_m C_1 - J_o^* D_1,$$

$$K_2 = J_m C_2 - J_o^* D_2 + J_o \Omega_2, \quad K_3 = J_m C_3 - J_o^* D_3,$$

$$4.7) \quad K_4 = J_m C_4 - J_o^* D_4 + J_o \Omega_4, \quad K_5 = J_m C_5 - J_o^* D_5,$$

$$K_6 = J_m C_6 - J_o^* D_6 + J_o \Omega_6, \quad K_7 = J_m C_7 - J_o^* D_7,$$

$$K_8 = J_m C_8 - J_o^* D_8 + J_o \Omega_8, \quad K_9 = J_m C_9 - J_o^* D_9,$$

$$K_{10} = J_m C_{10} - J_o^* D_{10} + J_o \Omega_{10}, \quad K_{11} = J_m C_{11} - J_o^* D_{11},$$

$$K_{12} = J_m C_{12} - J_o^* D_{12} + J_o \Omega_{12},$$

⋮

$$L_n = -\frac{n}{2} K_n,$$

$$n \neq 0$$

$$C_0 = \theta_0 + 0,5, \quad C_1 = F_1, \quad C_2 = \theta_2 - 0,5, \quad C_3 = F_3, \quad C_4 = \theta_4,$$

$$C_5 = F_5, \quad C_6 = \theta_6, \quad C_7 = F_7, \quad C_8 = \theta_8, \quad C_9 = F_9,$$

$$C_{10} = \theta_{10}, \quad C_{11} = F_{11}, \quad C_{12} = \theta_{12},$$

$$\vdots$$

$$D_0 = 2 \lambda \theta_0, \quad D_1 = \lambda F_1, \quad D_2 = 2 \lambda \theta_2, \quad D_3 = \lambda F_3,$$

$$D_4 = 2 \lambda \theta_4, \quad D_5 = \lambda F_5, \quad D_6 = 2 \lambda \theta_6, \quad D_7 = \lambda F_7,$$

$$D_8 = 2 \lambda \theta_8, \quad D_9 = \lambda F_9, \quad D_{10} = 2 \lambda \theta_{10}, \quad D_{11} = \lambda F_{11},$$

$$D_{12} = 2 \lambda \theta_{12},$$

$$\vdots$$

$$\theta_0 = 0,125 \lambda^2 + 0,125 \lambda^4 + 0,3125 \lambda^6 + 0,875 \lambda^8 + 4,8125 \lambda^{10} +$$

$$+ 16,125 \lambda^{12} + \dots,$$

$$\theta_2 = -0,0625 \lambda^4 - 0,250 \lambda^6 - 0,875 \lambda^8 - 7,375 \lambda^{10} - 26,0625 \lambda^{12} - \dots,$$

$$\theta_4 = -0,125 \lambda^2 - 0,125 \lambda^4 - 0,250 \lambda^6 - 0,500 \lambda^8 + 1,250 \lambda^{10} +$$

$$+ 6,500 \lambda^{12} + \dots,$$

$$\theta_6 = 0,0625 \lambda^4 + 0,250 \lambda^6 + 0,8125 \lambda^8 + 2,500 \lambda^{10} + 7,562 \lambda^{12} + \dots,$$

$$\theta_8 = -0,0625 \lambda^6 - 0,375 \lambda^8 - 1,625 \lambda^{10} - 6,250 \lambda^{12} - \dots,$$

$$\theta_{10} = 0,0625 \lambda^8 + 0,500 \lambda^{10} + 2,6875 \lambda^{12} + \dots,$$

$$\theta_{12} = -0,0625 \lambda^{10} - 0,625 \lambda^{12} - \dots,$$

$$\vdots$$

$$F_0 = 0,5,$$

$$F_1 = 0,5 \lambda + 0,125 \lambda^3 + 0,058594 \lambda^5 + 0,03418 \lambda^7 + 0,02243 \lambda^9 +$$

$$+ 0,015862 \lambda^{11} + \dots,$$

$$F_2 = -0,5,$$

$$F_3 = -0,5 \lambda - 0,1875 \lambda^3 - 0,105469 \lambda^5 - 0,068359 \lambda^7 - \\ - 0,048652 \lambda^9 - 0,044701 \lambda^{11} - \dots,$$

$$F_5 = 0,0625 \lambda^3 + 0,058594 \lambda^5 + 0,048828 \lambda^7 + 0,040054 \lambda^9 + \\ + 0,051069 \lambda^{11} + \dots,$$

$$F_7 = -0,011719 \lambda^5 - 0,01709 \lambda^7 - 0,018692 \lambda^9 - 0,027517 \lambda^{11} - \dots,$$

$$F_9 = 0,002441 \lambda^7 + 0,004807 \lambda^9 + 0,006489 \lambda^{11} + \dots,$$

$$F_{11} = -0,000534 \lambda^9 - 0,001322 \lambda^{11} - \dots,$$

⋮

$$\Omega_0 = 0,5 \lambda^2 + 0,25 \lambda^4 + 0,5 \lambda^6 + 1,25 \lambda^8 + 3,5 \lambda^{10} + 10,5 \lambda^{12} + \dots,$$

$$\Omega_2 = 0,5 \lambda^2 - 0,25 \lambda^6 - \lambda^8 - 12,25 \lambda^{10} - 43,5 \lambda^{12} - \dots,$$

$$\Omega_4 = -0,25 \lambda^4 - 0,5 \lambda^6 - \lambda^8 - 2 \lambda^{10} - 3,75 \lambda^{12} - \dots,$$

$$\Omega_6 = 0,26 \lambda^6 + \lambda^8 + 3,25 \lambda^{10} + 10 \lambda^{12} + \dots,$$

$$\Omega_8 = -0,25 \lambda^8 - 1,5 \lambda^{10} - 6,5 \lambda^{12} - \dots,$$

$$\Omega_{10} = 0,25 \lambda^{10} + 2 \lambda^{12} + \dots,$$

$$\Omega_{12} = -0,25 \lambda^{12} - \dots,$$

⋮

$$\alpha_j = \frac{T}{K} j.$$

Wzór (4.6) jest słuszny dla mechanizmów wielokorbowych o dowolnej liczbie  $k$  wykorbień wału, a w szczególnym przypadku przy  $\alpha_{j=0} = \alpha_0 = 0$  obowiązuje dla mechanizmu jednokorbowego.

### 5. Sumowanie szeregów

Ciągi współczynników  $\Theta_n$ ,  $F_n$ ,  $\Omega_n$  szeregów Fouriera  $I_1(\varphi)$  i  $I_2(\varphi)$  (4.7) są szybkozbieżne ze względu na  $\lambda$ . Dla zachowania dużej dokładności obliczeń tych ciągów wystarczy uwzględnić jako ostatnie wyrazy o wskaźnikach 11 i 12 /zależnie od skoków krotności rozpatrywanego ciągu/, bowiem ze względu na małą wartość liczbową  $\lambda / \max \lambda = 0,4/$ , wyrazy ciągów o wskaźnikach wyższych od podanych granicznych są pomijalnie małe i nie mają praktycznego wpływu na wielkość rozpatrywanych sum.

Po wysumowaniu względem wskaźnika  $j$  występujących we wzorze (4.6) sum, zależność na siły uogólnione od energii kinetycznej mechanizmów wielokorbowych otrzymano w postaci szeregów pojedynczych.

$$(5.1) \quad Q_{E_w}^*(\varphi) = \ddot{\varphi}^* \mathcal{E}_1(\varphi) + \dot{\varphi}^{*2} \mathcal{E}_2(\varphi),$$

gdzie zmienne współczynniki wynoszą:

$$(5.2) \quad \mathcal{E}_1(\varphi) = k \sum_{\nu=0}^m K(\nu p) \cos(\nu p \varphi),$$

$$\mathcal{E}_2(\varphi) = k \sum_{\nu=1}^m L(\nu p) \sin(\nu p \varphi).$$

Tu  $\nu$  to wskaźnik sumowania,  $p$  wskaźnik,  $(\nu p)$  krotność współczynników szeregów;  $(\nu p) = (1, 2, 3, \dots, 12)$ . Graniczny wskaźnik  $m$  sum nieskończonych szeregów Fouriera (5.2), narzucony został przyjęciem za ostatnie dwunastych wyrazów współczynników szeregów  $K_{12}$  i  $L_{12}$ .

Dla mechanizmów dwusuwowych:

$$(5.3) \quad p = k, \quad m = 12,$$

dla mechanizmów czterosuwowych:

$$(5.4) \quad p = \frac{k}{2}, \quad m = 24.$$

## 6. Analiza otrzymanych wzorów

Współczynniki sum (5.2)  $K_{(\nu p)}$  i  $L_{(\nu p)}$  o krotnościach  $(\nu p)$  całkowitych, występują w każdym przypadku różnych  $k$ . Dla mechanizmów czterosurowych  $/p = \frac{k}{2}/$  współczynniki  $K_{(\nu p)}$  i  $L_{(\nu p)}$  o krotnościach  $(\nu p)$  połówkowych, są zerami. Dla mechanizmów dwusurowych  $/p=k/$  ilość składników sum (5.2) jest dwukrotnie mniejsza /por. (5.3) i (5.4) /. Dokładność ciągów współczynników  $K_{(\nu p)}$  i  $L_{(\nu p)}$  do ich dwunastych wyrazów przyjęto w celu uchwycenia pierwszych głównych harmonicznych szeregów dla wszystkich  $k = (1, 2, \dots, 12)$ . Ciągi te są jednak szybkozbieżne. Decydują ich pierwsze człony. Z powodu małej wielkości  $\lambda$  istotną rolę mają człony o wskaźniku odpowiadającym co najwyżej pierwszej harmonicznej czy połowie pierwszej głównej harmonicznej. Decydujący wpływ mają wyrazy o wskaźniku zerowym. Im większa jest liczba wykorbień mechanizmu, tym szereg harmonicznych głównych jest szybciej zbieżny. Przy  $k \geq 6$  wystarczy uwzględniać jedynie pierwsze harmoniczne.

## 7. Uwagi końcowe

Otrzymane w pracy wzory (3.20), (4.4), (5.1) obowiązują dla mechanizmów jedno i wielokorbowych maszyn tłokowych jednostronnego działania. Będą one słuszne również dla mechanizmów korbowych maszyn tłokowych dwustronnego działania, po wprowadzeniu do wzorów zamiast  $\alpha_j = \frac{T}{K} j$ , kąтового przesunięcia fazowego  $\alpha_{j_d} = \alpha^{(2)}$ .  $j = \frac{T}{2K} j$ , przy czym  $j = (0, 1, 2, 3, \dots, k-1)$ .

W trakcie wyprowadzania wzorów na siły uogólnione od energii kinetycznej wyrażenia  $f_{o_k}(\varphi)$  i  $f_{1_k}(\varphi)$  /por. (4.5) / zastąpiono szeregami  $I_1(\varphi)$  i  $I_2(\varphi)$  /por. (4.7) /, bowiem po wstawieniu do równań ruchu (4.1) zależności w postaci (4.4) i badaniu ruchu mechanizmów trzeba by obliczać całki eliptyczne.

Przedstawiona w pracy ostateczna postać sił uogólnionych od energii kinetycznej mechanizmów korbowych /wzór (5.1) /, wyrażona pojedynczymi skończonymi szeregami trygonometrycznymi jest prosta i zwarta, dogodna przy konstrukcji metodami energetyczny-

ni modelu matematycznego dynamiki mechanizmów wielokorbowych  
i przy operacjach na tym modelu matematycznym.

#### LITERATURA

- [1] Stańczak M.: Wybrane zagadnienia badania ruchu nieustalonego mechanizmów wielokorbowych, Studia techniczne z. 11, Zeszyty naukowe WSP w Bydgoszczy, Bydgoszcz 1983
- [2] Gutowski R.: Mechanika analityczna, PWN Warszawa 1971
- [3] Biezeno C.B., Grammel R.: Technische Dynamik. Bd.I, Springer-Verlag, Berlin 1953
- [4] Stańczak M.: Analityczny sposób wyznaczania nierównomierności ruchu mechanizmów wielokorbowych, praca doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań 1973
- [5] Jędrzejowski J.: Mechanika układów korbowych silników samochodowych, WKiŁ Warszawa 1972
- [6] Kożeński J.: Dynamika maszyn, WNT Warszawa 1963 /tł. z czes./
- [7] Whittaker E.T.: Dynamika analityczna, PWN Warszawa 1959 /tł. z ang./
- [8] Siemiendiajew K.A., Bronsztejn I.N.: Matematyka. Poradnik encyklopedyczny, PWN Warszawa 1968 /tłum. z ros./
- [9] Ryżyk I.M., Gradsztejn I.S.: Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów, PWN Warszawa 1964 /tłum. z ros./



LAGRANGIAN FORCE OF KINETIC ENERGY OF MULTI - CONNECTING-ROD  
MECHANISMS AS EXPRESSED BY SINGLE FOURIER SERIES

Summary

In the article, the kinetic energy of multi-connecting-rod mechanisms in motion was calculated. Then, the author found Lagrangian forces of kinetic energy of such mechanisms and expressed them with an exact formula suitable for the construction of a mathematical model of the network's dynamics and for the operations done on this mathematical model.

ВИД СИЛ ЛАГРАНА ОТ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МНОГОКРИВОШИПНЫХ  
МЕХАНИЗМОВ, ПРЕДСТАВЛЕННАЯ ЕДИНИЧНЫМИ РЯДАМИ ФУРЬЕРА

Резюме

В работе установлено кинетическую энергию многокривошипных механизмов в движении под нагрузкой внешних сил, найдено обобщенные силы Лагранжа от кинетической энергии таких механизмов и выражено их точной формулой выгодной для конструкции математической модели динамики системы и при операциях на этой математической модели.