

BRONISŁAW KŁOS  
JAN KOCHAŃSKI

## **BADANIA MODELU MATEMATYCZNEGO SPRĘŻYNOWEGO REGULATORA PODCIŚNIENIA NA ELEKTRONICZNEJ MASZYNIE ANALOGOWEJ**

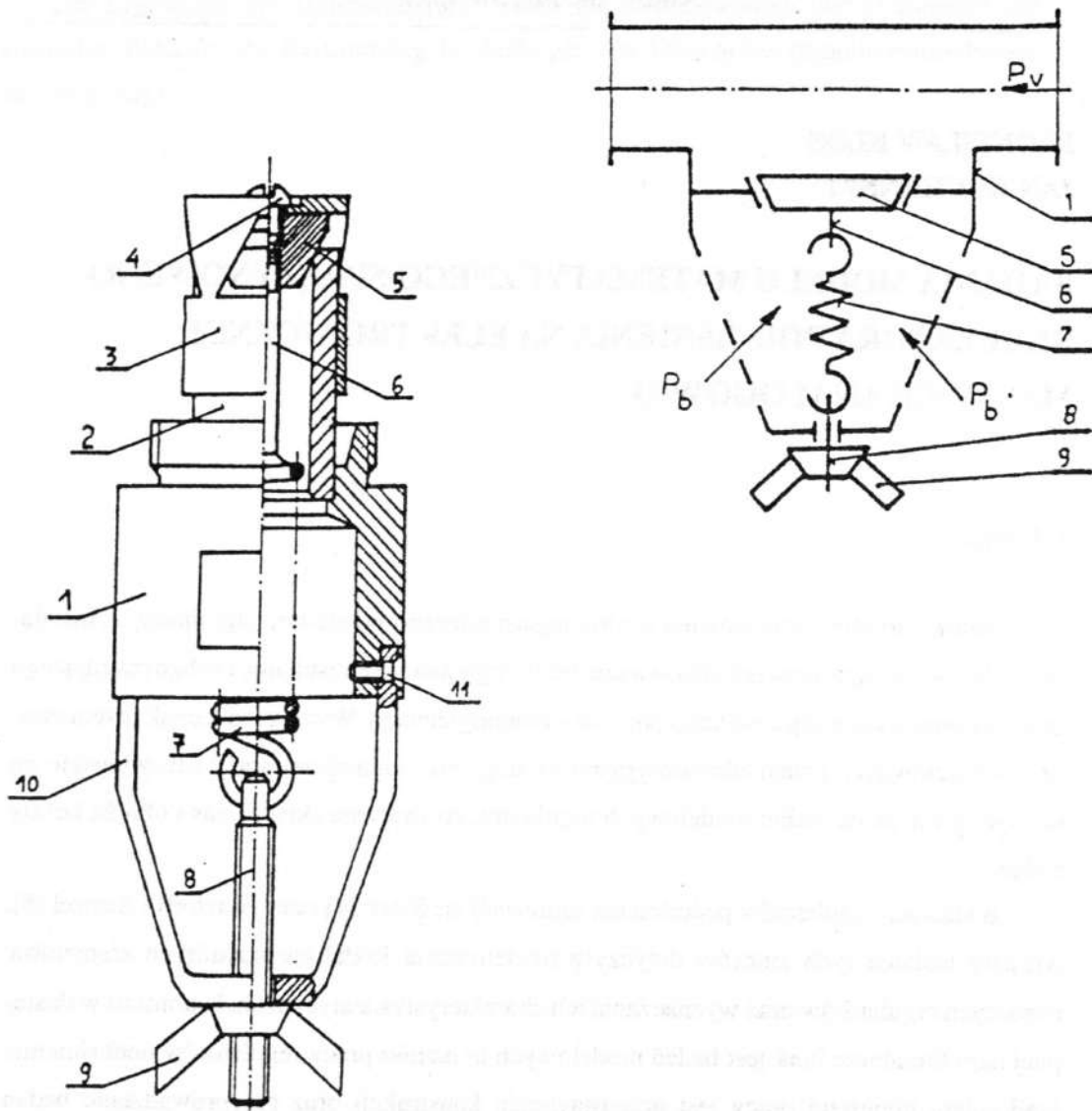
### **1. Wstęp**

Dobłą stabilność podciśnienia w rurociągach mleczno-powietrznych rolniczych instalacji udojowych osiąga się przez odpowiedni dobór regulatora podciśnienia, szybko reagującego na zakłócenia występujące podczas procesu technologicznego. Wymaga to jednak przeprowadzenia kosztownych badań laboratoryjnych. Dlatego też w niniejszej pracy zdecydowano się na przeprowadzenie badań modelowych regulatora, co znacznie skraca czas i obniża koszty badań.

Badaniami regulatorów podciśnienia zajmowali się Sinek [4] oraz Worstorff i Stanzel [6]. Niestety badania tych autorów dotyczyły modelowania kształtów niektórych elementów roboczych regulatorów oraz wyznaczania ich charakterystyk statycznych. Natomiast w dostępnej nam literaturze brak jest badań modelowych dynamiki pracy regulatorów podciśnienia. Stąd celem niniejszej pracy jest przedstawienie konstrukcji oraz przeprowadzenie badań modelowych sprężynowego regulatora podciśnienia na elektronicznej maszynie analogowej.

## 2. Opis działania regulatora

Konstrukcję regulatora przedstawiono na rys. 1.



- 1 – korpus, 2 – tuleja prowadząca, 3 – suwak, 4 – wkręt, 5 – grzybek, 6 – trzepień,  
7 – sprężyna, 8 – śruba napinająca, 9 – nakrętka, 10 – wspornik, 11 – wkręt

Rys. 1. Konstrukcja sprężynowego regulatora podciśnienia

W korpus 1 wpasowano na wcisk tuleję 2, której zewnętrzna część jest jednocześnie prowadnicą suwaka 3. Suwak ten wykonano w postaci walca w ścianie bocznej, w którym wyfrezowano cztery trapezowe okienka, natomiast górną część przykręcono wkrętem do grzybka 5. Między suwakiem a tuleją prowadzącą występuje luźne pasowanie, co umożliwia podczas pracy przesuwanie się suwaka po zewnętrznej stronie tulei. Sprężynę 7 połączono w górnej części z trzpieniem 6, a w dolnej - ze śrubą napinającą 8. Nakrętka 9 służy do napinania sprężyny, a tym samym do ustalania wartości zadanej podciśnienia. Czujnikiem ciśnienia jest grzybek 5 wraz ze sprężyną. Ugięcie sprężyny i przesunięcie grzybka wskazują zmiany podciśnienia  $p_v$ . Sumator stanowi ten sam zespół (grzybek - sprężyna), ponieważ na tych elementach występuje porównanie dwóch sił - siły na grzybku proporcjonalnej do podciśnienia  $p_v$  z siłą ustaloną za pomocą nakrętki 9 w sprężynie 7. Nastawnikiem jest grzybek regulatora, a siła sprężyny jest wielkością zadającą. Wielkością regulowaną jest przemieszczenie grzybka  $\Delta z$ , a wielkością sterującą - podciśnienie  $p_v$ .

### 3. Model matematyczny regulatora

Schemat regulatora i podstawowe oznaczenia przedstawiono na rys. 1. Przyjęto, że ciśnienie atmosferyczne  $p_b$  przed regulatorem jest stałe, a  $p_v$  jest podciśnieniem względem  $p_b$ . Równanie równowagi sił działających na grzybek na podstawie zasady d'Alamberta [2] można przedstawić w postaci:

$$m \cdot \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} + c_1 \cdot \frac{d \Delta z}{dt} + c_s \cdot \Delta z = A \cdot \Delta p_v \quad (1)$$

gdzie:  $m$  - masa części ruchomych [kg]

$\Delta z$  - przesunięcie pionowe grzybka [m]

$c_1$  - współczynnik tarcia lepkiego [ $\text{Nsm}^{-1}$ ]

$c_s$  - stała sprężyny [ $\text{Nm}^{-1}$ ]

$A$  - powierzchnia czynna grzybka [ $\text{m}^2$ ]

$p_v$  - podciśnienie w rurociągu [Pa]

Po podzieleniu obydwu stron równania (1) przez masę  $m$  otrzymujemy:

$$\frac{d^2 \Delta z}{dt^2} + \frac{c_1}{m} \cdot \frac{d \Delta z}{dt} + \frac{c_s}{m} \Delta z = \frac{A}{m} \cdot \Delta p_v \quad (2)$$

oznaczając:

$$\frac{c_1}{m} = 2\delta, \quad \frac{c_s}{m} = \omega_n^2, \quad \frac{A}{m} = k_r$$

otrzymamy:

$$\frac{d^2\Delta z}{dt^2} + 2\delta \frac{d\Delta z}{dt} + \omega_n^2 \Delta z = k_r \Delta p_v \quad (3)$$

gdzie:  $\delta$  - współczynnik tłumienia

$\omega_n$  - pulsacja drgań własnych

$k_r$  - współczynnik wzmocnienia

Wartość współczynnika tarcia płynnego  $c_1$  określono na podstawie wzoru Newtona [2]

$$c_1 = \frac{\Pi \cdot \mu \cdot d_1 \cdot h}{l} \quad (4)$$

gdzie:  $\mu$  - współczynnik lepkości dynamicznej [Pa·s]

$d_1$  - średnica zewnętrzna tulejki [m]

$h$  - wysokość suwaka będąca w styku z tuleją przy  $\Delta z=0$  [m]

$l$  - luz między suwakiem a tulejką [m]

W naszym przypadku mamy:  $d=30$  mm,  $h=20$  mm,  $l=25$   $\mu$ m oraz  $\mu=0,14$  dla oleju HYDROL - 30.

Podstawiając do wzoru (4) powyższe dane liczbowe otrzymamy  $c_1=10$  Nsm<sup>-1</sup>. Pozostałe stałe wartości wynoszą: masa części ruchomych  $m=0,16$  kg, stała sprężyny  $c_s=1230$  Nm<sup>-1</sup>, powierzchnia czynna grzybka  $A=2,544 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup> oraz współczynnik wzmocnienia

$$k_r = \frac{A}{m} = 1,59 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}}$$

#### 4. Schemat analogowy regulatora

Po przekształceniu równania (2) i wprowadzeniu współczynników skal amplitud wielkości fizycznych w nim występujących (przyspieszenie, prędkość, przesunięcie i ciśnienie) otrzymamy równanie maszynowe w postaci [1]:

$$\alpha_{\Delta z} \frac{d^2\Delta z}{dt^2} = k_r \frac{\alpha_{\Delta z}}{\alpha_{\Delta p}} [\alpha_{\Delta p} \Delta p_v] - \frac{c_1}{m} \frac{\alpha_{\Delta z}}{\alpha_{\Delta z}} [\alpha_{\Delta z} \frac{d\Delta z}{dt}] - \frac{c_s}{m} \frac{\alpha_{\Delta z}}{\alpha_{\Delta z}} [\alpha_{\Delta z} \Delta z] \quad (5)$$

gdzie:  $\alpha_{\Delta z}$  - współczynnik skali przyspieszenia

$\alpha_{\Delta z}$  - współczynnik skali prędkości

$\alpha_{\Delta z}$  - współczynnik skali przesunięcia

$\alpha_{\Delta p}$  - współczynnik skali ciśnień

Współczynniki te określone są następującymi zależnościami [1]

$$\alpha_{\Delta \ddot{z}} = \frac{1[\text{JM}]}{\omega_0^2 \cdot \Delta z_{\max}}; \quad \alpha_{\Delta \dot{z}} = \frac{1[\text{JM}]}{\omega_0 \cdot \Delta z_{\max}}; \quad \alpha_{\Delta z} = \frac{1[\text{JM}]}{\Delta z_{\max}}; \quad \alpha_{\Delta p} = \frac{1[\text{JM}]}{\Delta p_v}$$

gdzie: 1 [JM] - maksymalna wartość maszyny analogowej (jednostka maszynowa)

$\omega_0$  - pulsacja drgań tłumionych

$\omega_0 \cdot \Delta z_{\max}$  - maksymalna spodziewana wartość prędkości

$\omega_0^2 \cdot \Delta z_{\max}$  - maksymalna spodziewana wartość przyspieszenia

Po wprowadzeniu zmiennych maszynowych równanie (5) przyjmuje postać:

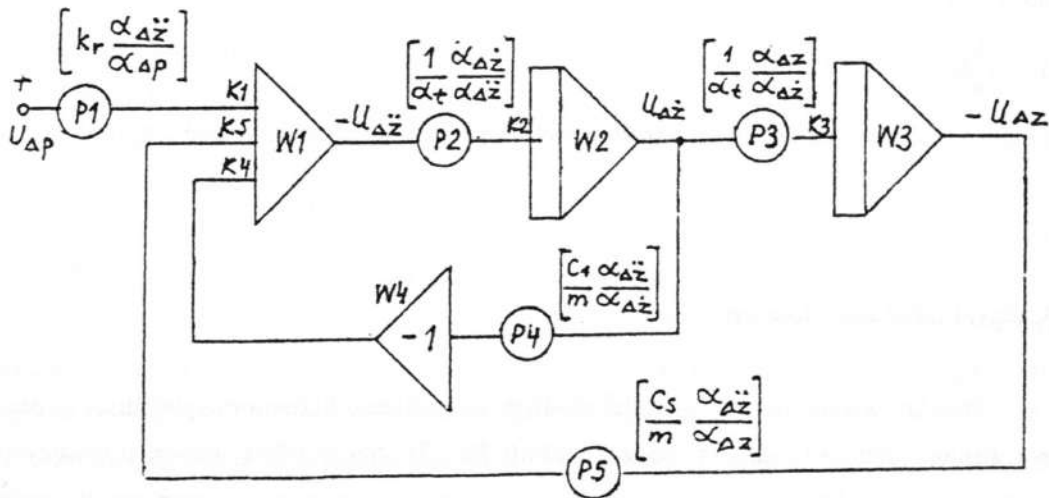
$$U_{\Delta \ddot{z}} = k_r \frac{\alpha_{\Delta \ddot{z}}}{\alpha_{\Delta p}} \cdot U_{\Delta p} - \frac{c_1 \alpha_{\Delta \ddot{z}}}{m \alpha_{\Delta \dot{z}}} \cdot U_{\Delta \dot{z}} - \frac{c_s \alpha_{\Delta \ddot{z}}}{m \alpha_{\Delta z}} \cdot U_{\Delta z} \quad (6)$$

gdzie:  $U_{\Delta \ddot{z}}$ ,  $U_{\Delta \dot{z}}$ ,  $U_{\Delta z}$ ,  $U_{\Delta p}$  - zmienne maszynowe

Zmienne te określone są następującymi zależnościami:

$$U_{\Delta \ddot{z}} = \alpha_{\Delta \ddot{z}} \frac{d^2 \Delta z}{dt^2}; \quad U_{\Delta \dot{z}} = \alpha_{\Delta \dot{z}} \frac{d \Delta z}{dt}; \quad U_{\Delta z} = \alpha_{\Delta z} \cdot \Delta z; \quad U_{\Delta p} = \alpha_{\Delta p} \cdot \Delta p_v$$

Na podstawie równania (6) sporządzono schemat analogowy regulatora przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2. Schemat analogowy regulatora

Wielkością wejściową regulatora jest podciśnienie  $p_v$  zadawane skokiem jednostkowym, którego amplitudę można ustawić potencjometrem P1. Wzmacniacz W1 realizuje operację sumowania analogowego prawej strony równania (6). Sygnał na wyjściu wzmacniacza W1 odzwierciedla przebieg przyspieszenia części ruchomych w funkcji czasu.

Potencjometry P2 i P3 umożliwiają wprowadzenie zmian wartości współczynnika skali czasu  $\alpha_t$ , natomiast P4 i P5 - odpowiednio wartości  $c_1$  i  $c_s$ . Łączna zmiana nastaw potencjometrów P1, P4 i P5 symuluje zmianę masy  $m$  elementów ruchomych regulatora. Integratory W2 i W3 odwzorowują kolejno: prędkość i przesunięcie grzybka regulatora. Nastawy potencjometrów określone są przez następujące zależności:

$$P1 = \frac{1}{K1} \cdot k_r \cdot \frac{\alpha_{\Delta\ddot{z}}}{\alpha_{\Delta p}} \quad ; \quad P2 = \frac{1}{K2} \cdot \frac{1}{\alpha_t} \cdot \frac{\alpha_{\Delta\dot{z}}}{\alpha_{\Delta\ddot{z}}} \quad ; \quad P3 = \frac{1}{K3} \cdot \frac{1}{\alpha_t} \cdot \frac{\alpha_{\Delta z}}{\alpha_{\Delta\dot{z}}} \quad ; \quad P4 = \frac{1}{K4} \cdot \frac{c_1}{m} \cdot \frac{\alpha_{\Delta\ddot{z}}}{\alpha_{\Delta\dot{z}}} \quad ;$$

$$P5 = \frac{1}{K5} \cdot \frac{c_s}{m} \cdot \frac{\alpha_{\Delta\ddot{z}}}{\alpha_{\Delta z}}$$

gdzie: K1...K5 - wzmocnienia wzmacniaczy

$$\alpha_t - \text{współczynnik skali czasu } \alpha_t = \frac{T}{t}$$

T - czas maszynowy

t - czas rzeczywisty

Nastawy potencjometrów P1, P4 i P5 wynikają bezpośrednio z równania (6), natomiast nastawy P2 i P3 z zależności:

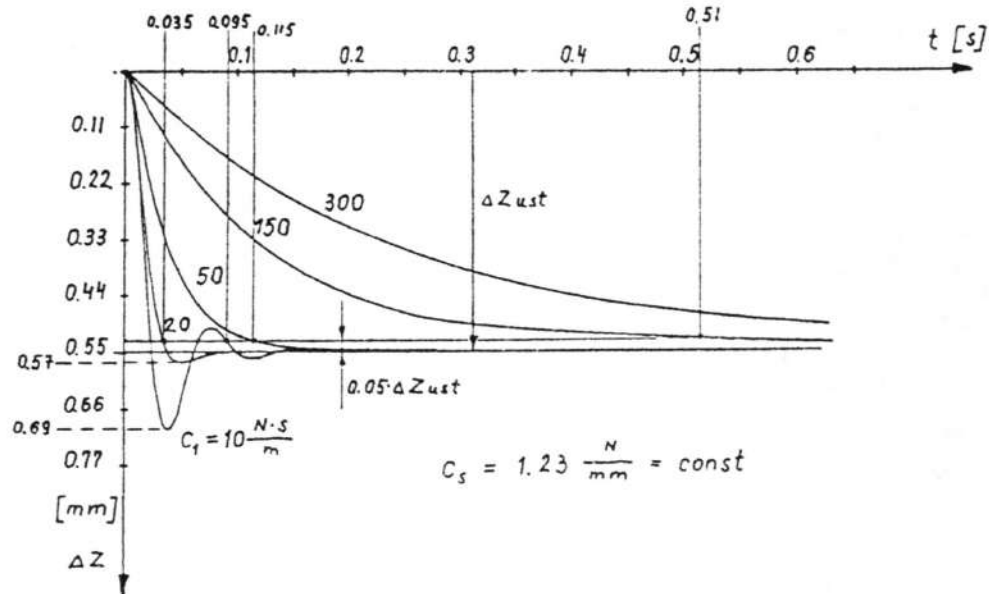
$$\Delta z = \int_0^t \Delta \dot{z} dt, \quad \Delta \dot{z} = \int_0^t \Delta \ddot{z} dt,$$

po wprowadzeniu współczynnika skali czasu [1], [5] i współczynników skal amplitud.

## 5. Opis badań modelowych

Przedstawiony na rys. 2. model analogowy poddano badaniom symulując skokową zmianę ciśnienia  $\Delta p_v$  wynoszącą 2666 Pa [7]. Szczególną uwagę poświęcono wpływowi współczynnika tarcia lepkiego  $c_1$ , stałej sprężyny  $c_s$  oraz masy części ruchomych  $m$  na własności dynamiczne regulatora. Ocenę dynamiki regulatora przeprowadzono na podstawie charakterystyk skokowych określając takie wskaźniki, jak przeregulowanie i czas regulacji [3]. Wpływ współczynnika tarcia lepkiego  $c_1$  na

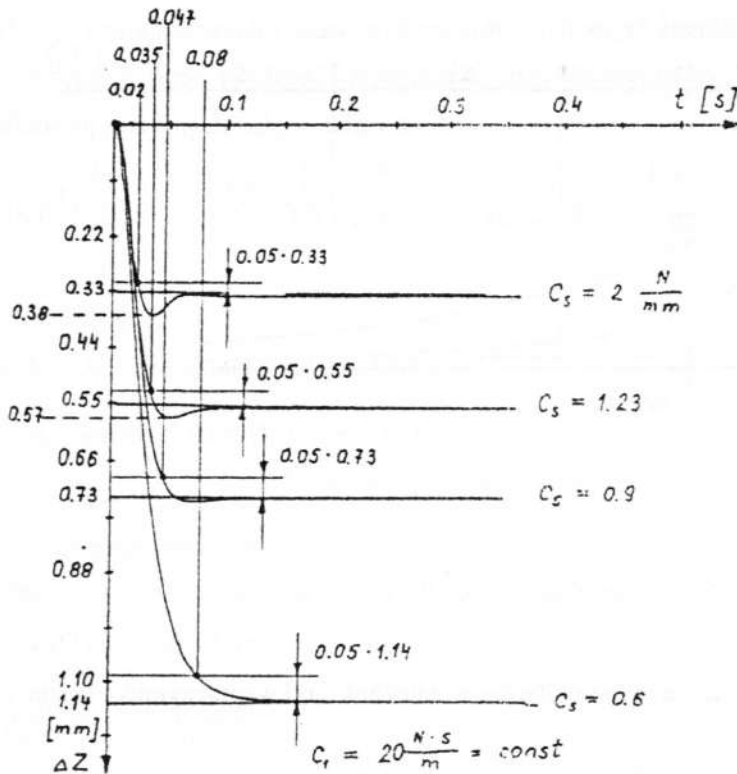
przebieg przesunięcia grzybka regulatora w czasie przedstawiono na rys. 3. Przebiegi te zostały zdjęte dla następujących wartości współczynnika  $c_1$ : 10, 20, 50, 150, 300 [Nsm-1] przy ustalonych pozostałych parametrach:  $c_s = 1.23 \frac{N}{mm}$ ,  $m = 0.16 \text{ kg}$ ,  $k_r = 1.59 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{kg}$ .



Rys. 3. Przebieg przesunięcia grzybka regulatora w zależności od współczynnika tarcia lepkiego  $c_1$

Z analizy wykresów na rys. 3. wynika, że najkorzystniejszy jest przebieg dla  $c_1 = 20 \text{ Ns/m}$  o nieznacznym przeregulowaniu wynoszącym ok. 3.6% i krótkim czasie ustalania się przesunięcia wynoszącym ok. 35 ms. Dla współczynnika  $c_1 = 10 \text{ Ns/m}$  przebieg charakteryzuje się słabo tłumionymi oscylacjami ze znacznym przeregulowaniem wynoszącym ok. 25%. Natomiast dla współczynników  $c_1$  o wartościach większych od 50 Ns/m występuje wyraźne zwolnienie przebiegów. W związku z

powyższym w dalszej analizie dynamiki pracy regulatora przyjęto wartość  $c_1=20$  Ns/m jako stałą. Rys. 4. przedstawia wpływ stałej sprężyny  $c_s$  na charakter przemian  $\Delta z$  grzybka regulatora w czasie. Badania modelu wykonano dla następujących wartości stałej sprężyny  $c_s$ : 0.6; 0.9; 1.23; 2.0 N/mm przyjmując jako stałe:  $c_1=20$  Ns/m,  $m=0.16$  kg oraz  $k_r=1.59 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{kg}$

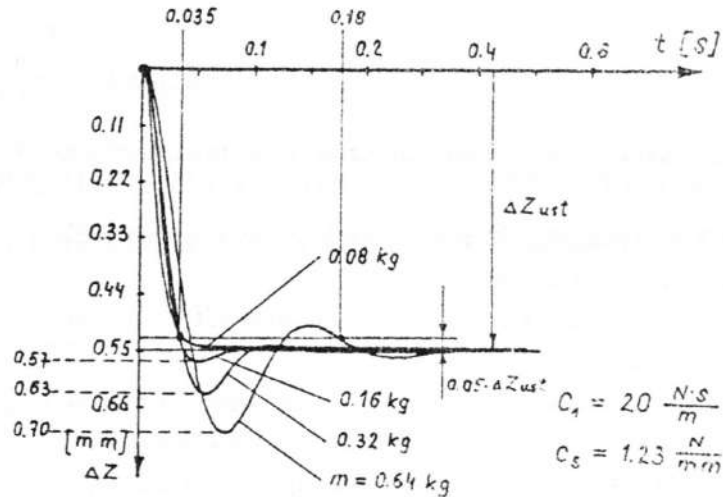


Rys. 4. Przebieg przesunięcia grzybka regulatora w zależności od stałej sprężyny

Przebiegi na rys. 4. wskazują, że wzrost wartości stałej sprężyny  $c_s$  powoduje zmniejszenie wartości ustalonej przesunięcia  $\Delta z_{ust}$ . Zgodnie z równaniem (1) w stanie ustalonym przesunięcie  $\Delta z$  jest odwrotnie proporcjonalne do stałej sprężyny  $c_s$ . Najkorzystniejsze przebiegi otrzymano dla  $c_s=0.9$  i 1.23 N/mm przy których przeregulowanie wynosi odpowiednio 0 i 3.6 %, natomiast czas ustalania się przesunięcia jest równy odpowiednio ok. 47 i 35 Ns. Do dalszej analizy przyjęto wartość  $c_s=1.23$  N/mm. Na rys. 5. przedstawiono wpływ masy części ruchomych regulatora na charakter przesunięcia grzybka. Przebiegi zostały zdjęte dla



następujących wartości masy  $m$ : 0.08; 0.16; 0.32; 0.64 kg przyjmując jako stałe:  $c_1=20$  Ns/m,  $c_s=1.23$  N/mm,



Rys. 5. Przebieg przesunięcia grzybka regulatora w zależności od masy  $m$  części ruchomych

Jak wynika z wykresu na rys. 5. najkorzystniejszy jest przebieg dla masy  $m=0.16$  kg; wartość przeregulowania w tym przypadku wynosi ok. 3.6%, a czas regulacji nie przekracza 35 ms. Wzrost masy części ruchomych prowadzi do powstania oscylacji ze znacznym przeregulowaniem oraz wydłużeniem czasu regulacji. Na przykład 2 - krotny wzrost masy (do 0.32 kg) sprawia, że przeregulowanie wzrasta do ok. 14.5%, a 4 - krotny wzrost zwiększa przeregulowanie do ok. 27%; czas regulacji wydłuża się przy tym do ok. 180 ms.

## 6. Zakończenie

Z przedstawionych badań regulatora wynika, że najkorzystniejsze parametry pracy uzyskuje się dla następujących wartości współczynników:  $c_1=20$  Ns/m,  $c_s=1,23$  N/mm,  $m=0.16$  kg. Występujące przy tych wartościach przeregulowanie jest niewielkie i wynosi ok. 3.6% a czas dojścia do stanu ustalonego jest krótki i wynosi ok. 35 ms.

Opisane w artykule badania pozwoliły na szybki dobór i ocenę wpływu ww. współczynników na własności dynamiczne regulatora.

## LITERATURA

- [1] Gajewska H., Miś I., Kochański J., Laboratorium automatyki i podstaw informatyki. WSP Bydgoszcz 1987
- [2] Palczak E., Dynamika układów i urządzeń hydraulicznych. P Wr Wrocław 1983
- [3] Perycz S., Podstawy automatyki. PG Gdańsk 1976
- [4] Sinek F., Matematický model statických charakteristik ventilů dojičích zařízení Zemedelska Technika č. 2 - 1981
- [5] Tabacka D., Wyszogrodzka M., Wysocka I., Podstawy modelowania matematycznego i programowania przy pomocy maszyny analogowej ELWAT - 1 UŁ Łódź 1973
- [6] Worstorff H., Stanzel H., Vergleichende Messungen zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit von Regelventilen in Melkanlagen Landtechnik H. 4 - 1979
- [7] ISO - norms for Milking Maschine Instalations Alfa - Laval, Sweden 1985

## INVESTIGATION OF MATHEMATICAL MODEL OF THE SPRING REGULATOR OF UNDERPRESSUNG ON ANALOGUE COMPUTER

### Summary

The paper presents a design of the spring-loaded vacuum governor, and the results of the investigations modelled by the use of an electronic analogue computer. The equations are given which describe operation of the governor, and the coefficient values for that governor are also presented. This was the basis for the elaboration of an analogue diagram (program) for the electronic computer. The conclusions summing up the investigations are given at the end of the paper.