ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Studia Techniczne 1983 z.11

EWARYST GRODZKI
ARNOLD WILCZYŃSKI
WSP w Bydgoszczy

NIEKTÓRE PROBLEMY DYDAKTYCZNE W NAUCZANIU MECHANIKI ANALITYCZNEJ

1. Wstęp

Trudności związane z efektywnym nauczaniem mechaniki są dobrze znane autorom podręczników akademickich, [2], [3], jak też nauczycielom tego przedmiotu w Wyższych Szkołach Pedagogicznych, Akademiach Rolniczych, Uniwersytetach a w szczególności w Politechnikach. Uwaga wprowadzająca dotyczy przede wszystkim mechaniki analitycznej jako kursu bardziej zaawansowanego w sensie złożoności pojęć. Stosownym będzie przypomnienie, że właśnie abstrakcyjne struktury pojęciowe mechaniki stanowią zasadniczą barierę w przyswajaniu materiału przez studentów. Ponieważ struktury te są najbardziej złożone właśnie w mechanice analitycznej, przeto i nauczanie tego materiału napotyka na największe trudności. W dążeniu do dydaktycznej racjonalizacji pojęć i zasad mechaniki analitycznej różni autorzy prac z tego zakresu, [1], [2], [3], [4], [6], przedstawiają własne ujęcia omawianych zagadnień. Są to ujęcia bardziej lub mniej oryginalne, przy czym nie zamyka to tematu definitywnie. Jest zrozumiałe, że nie zamknie go również prezentowana praca, pozostawiając nadal problem dyskusji do dyskusji.

2. Aspekty dydaktyczne mechaniki analitycznej w dziedzinie pojęć

Polem zastosowania mechaniki analitycznej jest przede wszystkim mechanika układów nieswobodnych. Fizyczne wyjaśnienie sensu takich układów nie nastręcza trudności. Związane z pojęciem skrępowania układu definicje więzów, mają również przejrzyste interpretacje geometryczne /jeśli ograniczyć się do układów holonomicznych/. Jednakże istotne jest zaakcentowanie, że w równaniach więzów odpowiednio skleronomicznych i reonomicznych, [3]:

$$(1)\qquad \begin{array}{l} f_k\left(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_{3n}\right) = 0; \\ f_k\left(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_{3n}, t\right) = 0; \end{array} \qquad k = 1,2,3\ldots r,$$

gdzie: x_j - kolejne współrzędne kartezjańskie punktów układu materialnego, n - ilość punktów, r - ilość równań więzów, t - czas, - drugie równania - wobec jawnej zależności od czasu dotyczą więzów ruchomych. Jest to ruch niezależny od ruchu układu względem więzów - ten ostatni mieści się w zależnościach $x_j = x_j(t)$ i w konsekwencji jest niejawną zależnością obu typów równań więzów od czasu. Takie rozróżnienie ma zasadnicze znaczenie dla prawidłowej interpretacji przesunięć możliwych i wirtualnych.

Odpowiednio dla równań więzów typu (1) funkcje zamiany współrzędnych są postaci:

$$(2)\qquad \begin{cases} x_j = x_j(q_i); \\ x_j = x_j(q_i, t), \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots s,\ s=3n-k \\ j = 1,2,\ldots 3n, \end{array}$$

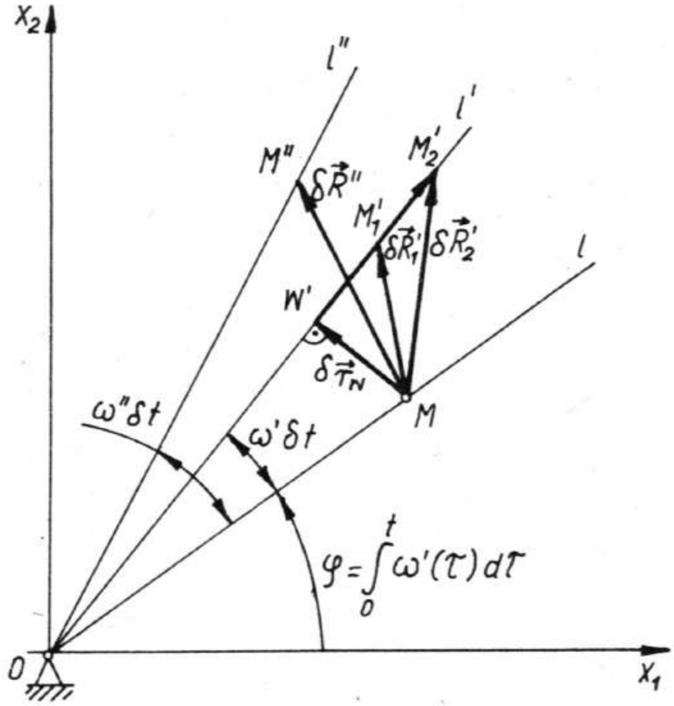
gdzie q_i - są uogólnionymi współrzędnymi Lagrange'a, a s-oznacza liczbę stopni swobody układu.

Stosownie do dwu postaci funkcji (2) można utworzyć dwie wariacje współrzędnych naturalnych x_j :

$$(3)\qquad \begin{cases} \delta x_j = \dfrac{\partial x_j}{\partial q_i}\,\delta q_i \quad ; \\[2ex] \delta x_j = \dfrac{\partial x_j}{\partial q_i}\,\delta q_i + \dfrac{\partial x_j}{\partial t}\,\delta t \ , \end{cases}$$

Wzory (3) wyrażają przemieszczenia możliwe odpowiednio dla układów skleronomicznych i reonomicznych.

Skoncentrujmy teraz uwagę na przemieszczeniach wirtualnych w układach reonomicznych. Spotykana definicja, np. [3]: różnica dwóch przemieszczeń możliwych, realizowanych w tym samym czasie δt jest przemieszczeniem wirtualnym-jest nieścisła oraz mało komunikatywna. Można się z tym zgodzić z punktu widzenia interpretacji geometrycznej, określającej niejednoznacznie miarę przesunięcia wirtualnego w sensie jakościowym. Prócz tego u podstaw tej definicji leży założenie, że rozpatrywany układ zrealizował co najmniej dwa przesunięcia możliwe, przy czym żadne z nich nie musi być przesunięciem prawdziwym w ruchu rzeczywistym. Różnicując dwa przesunięcia możliwe w tym samym czasie zakłada się, że chodzi o ruch prawdziwy - przynajmniej w zakresie rzeczywistego ruchu więzów. Bez uściślenia, co w gruncie rzeczy przyrost czasu δt wyraża - definicja staje się nieścisła. Zauważmy również, że przy dwóch różnych, możliwych dla danego układu ruchach więzów, różnica dwóch przesunięć możliwych zachodzących nawet w tym samym czasie nie jest przesunięciem wirturalnym. Podniesione zastrzeżenia zinterpretujemy na prostym przykładzie.



Rys.1. Obraz geometryczny przemieszczeń wirtualnych układu

Niech układem będzie punkt materialny M skrępowany więzami utworzonymi przez prostą l obracającą się w jednej płaszczyźnie, np. x_1x_2 z prędkością kątową ω', (Rys.1). Równania więzów są postaci:

$$(4)\qquad \begin{cases} x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 \operatorname{ctg}\varphi = 0, \quad \text{gdzie} \quad \varphi = \int_0^t \omega'(\tau)d\tau , \end{cases}$$

a zatem układ ma jeden stopień swobody. Współrzędną uogólnioną może być położenie OM = q liczone wzdłuż prostej od środka obrotu. Po czasie δt prosta zajmie nowe położenie l' a punkt przemieści się w położenie M_1', (rys. 1). Na przemieszczenie możliwe $\delta \vec{R}_1' = \overrightarrow{MM'}$ składa się wektor $\delta \vec{r}_w = \overrightarrow{MW'}$ wyrażający przemieszczenie wywołane ruchem więzów oraz przemieszczenie wyrażone wariacją δq_1 współrzędnej uogólnionej q bez wariacji czasu, tj. $\delta \vec{q}_1 = \overrightarrow{W'M_1'}$.

Stąd przemieszczenie możliwe jest równe:

(5) $$\delta \vec{R}_1' = \delta \vec{r}_w + \delta \vec{q}_1 \; .$$

Jeśli w innym ruchu porównawczym przy tej samej funkcji ω' punkt zajmie położenie M_2', to odpowiednio będzie:

(6) $$\delta \vec{R}_2' = \delta \vec{r}_w + \delta \vec{q}_2 \; .$$

Przesunięcie wirtualne stosownie do przytoczonej definicji wyniesie:

(7) $$\delta \vec{r} = \delta \vec{R}_2' - \delta \vec{R}_1' = \delta \vec{q}_2 - \delta \vec{q}_1 = \delta \vec{q}$$

i przy dodatkowych założeniach, o których wspomniano poprzednio definicja jest słuszna, bowiem przemieszczenie $\delta \vec{q}$ nie narusza więzów.

Załóżmy jednak, że w rozpatrywanym układzie w ruchu porównawczym funkcja obrotu prostej jest inna, np. $\omega'' = \omega''(t)$. Wówczas w takim samym czasie δt prosta l zajmie inne niż poprzednio położenie l'', (rys.1) a punkt M położenie np. M''. Powtarzając procedurę wyrażoną związkami (5) i (7), a następnie różnicując dwa dowolne przemieszczenia możliwe typu $\delta \vec{R}''$ i $\delta \vec{R}'$ otrzymamy przemieszczenie niezgodne z więzami. Takie przemieszczenie nie jest już przemieszczeniem wirtualnym, a zatem w tym przypadku definicja nie jest ścisła.

Można definicję przesunięć wirtualnych uściślić ograniczając jej zastosowanie tylko do prawdziwych ruchów więzów, jednakże obwarowanie jej zastosowania zbyt wieloma szczegółowymi zastrzeżeniami i tak uczyni ją nieprzejrzystą. Proponujemy inne zdefiniowanie przesunięć wirtualnych. Mianowicie istotą różnicy między przemieszczeniem możliwym i wirtualnym jest wektor przemieszczenia wywołanego ruchem więzów. Wektor ten, jak wskazano poprzednio, może być właśnie przyczyną niejednoznaczności i wprost nieścisłości w definiowanych przemieszczeniach wirtualnych.

W dydaktycznie racjonalnym sposobie poprawnego definiowania pojęć należy już przy charakterystyce układów niestacjonarnych zwrócić uwagę na rozgraniczenie między ruchem układu, a ruchem więzów. Należy więc w szczególności wskazać, że ruch więzów ma zawsze przyczynę zewnętrzną, która wpływa na ruch układu, lecz nie odwrotnie. Dalej - ruch więzów nie wpływa na zmianę liczby stopni swobody takiego samego układu stacjonarnego. I wreszcie - że w przypadku skrajnym jest możliwy ruch układu całkowicie skrępowanego, tzn. o ilości stopni swobody $s = 0$. Takie przygotowanie interpretacyjne od razu zwraca uwagę na rozróżnienie zewnętrznego ruchu więzów i wewnętrznego ruchu układu. Na tle naszkicowanego wprowadzenia przemieszczenia wirtualne można zdefiniować następująco: każde zgodne z więzami przemieszczenie możliwe bez wariacji czasu jest przemieszczeniem wirtualnym układu.

Definicja jest słuszna dla układów zarówno skleronomicznych jak i reonomicznych, bowiem w pierwszych układach wariacja czasu jest zawsze równa zeru. Pewne elementy przytoczonej definicji podano opisowo w [6], gdzie autor wprowadza pojęcie "zamrożenia więzów", /podobnie bez koniecznych objaśnień w [2]/. Prostota i przejrzystość przytoczonej tutaj definicji jest niewątpliwa. W rozpatrywanym przykładzie więzów na podstawie równań (4) można napisać równania zamiany współrzędnych (2) w postaci:

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1 = q \cos\varphi ; \\ x_2 = q \sin\varphi . \end{cases}$$

Wariacje współrzędnych z wariacją czasu, tzn. składowe wektora przesunięć możliwych będą:

$$(9) \qquad \begin{cases} \delta x_1 = \delta q \cos\varphi - q\,\omega \sin\varphi\, \delta t ; \\ \delta x_2 = \delta q \sin\varphi + q\,\omega \cos\varphi\, \delta t . \end{cases} \qquad \varphi = \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau ,$$

Wariacje współrzędnych bez wariacji czasu, tzn. przemieszczenia wirtualne układu są odpowiednio:

$$(10)\qquad \begin{cases} \delta x_1 = \delta q \cos\varphi ; \\ \delta x_2 = \delta q \sin\varphi . \end{cases}$$

Współrzędne wektorów (9) i (10) tworzą wektory $\delta\vec{r}_w$ i $\delta\vec{q}$ (rys. 1). Wielkości te, jako wyznaczone tutaj na podstawie prawdziwego ruchu więzów nie dopuszczają żadnej niejednoznaczności w określaniu przesunięć możliwych i wirtualnych.

Na zakończenie tych rozważań można dokonać pewnego skojarzenia omówionych definicji odniesionych do układów tak stacjonarnych, jak i niestacjonarnych. Otóż z zależności (10) wynika, że wzory te wyrażają przemieszczenie możliwe i wirtualne w rozpatrywanym układzie przekształconym na układ stacjonarny. Stąd można wyprowadzić wniosek, że przemieszczenia wirtualne w układzie niestacjonarnym są takie same jak w odpowiadającym mu układzie stacjonarnym.

3. Problemy dydaktyczne dotyczące podstaw teorii dynamiki

Podstawą teorii dynamiki są dynamiczne równania ruchu. Zarówno dla układów swobodnych, jak i nieswobodnych - są to równania wynikające z drugiej zasady Newtona. Jednakże w przypadku układów nieswobodnych do równań tych wchodzą siły reakcji więzów, co znacznie komplikuje ich postać oraz zwiększa ich ilość ponad niezbędne minimum. Z tego względu specjalnie dla takich układów rozwinięto dynamikę analityczną. Proces dydaktyczny tego działu mechaniki napotyka na znaczne trudności. Przedstawimy tutaj istotę tych trudności wraz z propozycją ich złagodzenia.

Podstawowe znaczenie w akademickiej mechanice analitycznej mają równania Lagrange'a II rodzaju:

$$(11)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i \ ; \quad i = 1,2,\dots s,$$

gdzie $E(\dot{q}_i, q_j, t)$ jest funkcją energii kinetycznej rozpatrywanego układu a Q_i są siłami uogólnionymi odpowiadającymi i-tej współrzędnej uogólnionej.

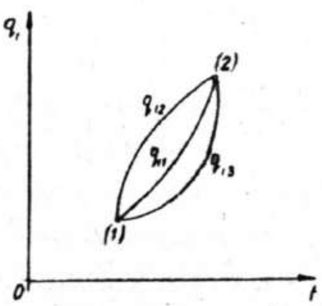
W kursie akademickim równania te są wyprowadzane z równań Newtona, np. [2], [3]. W tym celu należy drogą przekształceń okazać, że:

$$
(12)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \dfrac{\partial x_j}{\partial q_i}\,; \\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial x_j}{\partial q_i} = \dfrac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}\,; \\[2ex]
\sum\limits_{k=1}^{3n} m_j\,\ddot{x}_j = \sum\limits_{k=1}^{3n} \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial E}{\partial \dot{x}_j}\,; \\[2ex]
\sum\limits_{k=1}^{3n} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \dot{x}_j}\right)\delta x_j = \sum\limits_{i=1}^{s}\left[\dfrac{d}{dt}\sum\limits_{k=1}^{3n}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \dot{x}_j}\,\dfrac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial E}{\partial \dot{x}_j}\,\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial q_i}\right)\right]\delta q_i .
\end{cases}
$$

Po przeprowadzeniu tych dowodów częściowych drogą długich przekształceń otrzymuje się wreszcie równania w postaci (11). Nieprzejrzystość manipulacji matematycznych, pomimo ich poprawności jest wyjątkowa. Uzasadnienie fizyczne i stosowna interpretacja jest trudna dla profesjonalistów, /celowość matematyczna jest lepiej widoczna/, a cóż dopiero mówić o trudnościach dla studentów. Tak się też składa, że wyprowadzenie równań Lagrange'a II rodzaju bywa chętnie aplikowane jako temat na egzaminie pisemnym z mechaniki. Twierdzimy, że student pokonawszy duże trudności nauczy się wyprowadzenia na pamięć, odnosząc minimalną korzyść dydaktyczną. Istnieje niebezpieczeństwo, że koncentracja wysiłku włożonego w manipulacje matematyczne wytworzy u uczącego się przekonanie o ważności samego wyprowadzenia. Łatwo wówczas stracić z widzenia fakt, że o wiele ważniejsze są założenia dotyczące samych równań, a przede wszystkim postulat d'Alemberta o pracy wirtualnej sił reakcji więzów idealnych czy odmienność kwalifikacji sił czynnych i sił reakcji w dynamice układów swobodnych i nieswobodnych. Zwróćmy uwagę na jeszcze jeden znamienny szczegół. Otóż otrzymanie równań Lagrange'a z równań Newtona wymaga istnienia równań Newtona jako równań wyjściowych [5]. W efekcie więc mamy sytuację dydaktyczną następującą:

musi być podana jako sprawdzona lecz nie wymagająca dowodu zasada Newtona wraz z **równaniami** z zaznaczeniem, że jest to postulat teorii mechaniki. Następnie wprowadzając odpowiednie założenia drogą długich przekształceń dojdziemy do innego postulatu mechaniki - do równań Lagrange'a. Jednakże błędne jest mniemanie, że równania Lagrange'a zostały wyprowadzone, gdyż postulatu teorii wyprowadzić nie można. Na opisanej drodze pokazujemy tylko, że jeden postulat teorii mechaniki jest równoważny innemu postulatowi mechaniki. Skoro tak, to po co uciążliwe przekształcenia, jeżeli jeden postulat i tak musi być przyjęty á priori. Zatem z większym efektem dydaktycznym można uniknąć długich przekształceń formułując jako postulat teorii dynamiki wprost równania Lagrange'a II rodzaju. Czas poświęcony na przekształcenia korzystniej będzie przeznaczyć na szczegółowe omówienie założeń towarzyszących i stwierdzenie, że nie wymagającym dowodu postulatem mogą być zarówno równania Newtona, jak i Lagrange'a. Efekt okazania równoważności można znacznie łatwiej osiągnąć przechodząc w równaniach Lagrange'a ze współrzędnych uogólnionych układu nieswobodnego na współrzędne kartezjańskie układu swobodnego. Wówczas równoważność obu postulatów wynika natychmiastowo.

Jeśli w kursie mechaniki bardziej zaawansowanej zależy nam na ogólności postulatu podstawowego i jego interpretacji fizycznej, to jest możliwe inne jeszcze podejście do problemu. Zwróćmy tutaj uwagę na fakt, że do takich interpretacji nie nadają się ani równania Newtona, ani Lagrange'a. Jedne i drugie to równania różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu. Jak je interpretować w postaci ogólnej ? Odpowiedź bardzo trudna. W takim przypadku proponujemy inne podejście. Jako postulat teorii mechaniki należy w pierwszej kolejności sformułować zasadę Hamiltona dla dowolnych sił uogólnionych.



Rys.2. Szkic do interpretacji zasady Hamiltona

Według tej zasady układ dynamiczny może się przemieścić z położenia (1) do położenia (2) w przedziale czasu $[t_1, t_2]$ po różnych trajektoriach w przestrzeni zdarzeń, np. q_{i1}, q_{i2}, q_{i3} itd. (rys.2). Możliwe są wszystkie trajektorie porównawcze które nie naruszają więzów układu. Zasada Hamiltona w rozważanym przypadku ma brzmienie:

Spośród wszystkich możliwych trajektorii ruchu trajektorią rzeczywistą jest ta, dla której całka sumy:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta E + \sum_{i=1}^{s} Q_i \ \delta q_i \right) dt = 0 \tag{13}$$

wariacji energii kinetycznej bez wariacji czasu i pracy wirtualnej sił czynnych jest równa zero.

Należy tu wspomnieć, że to sformułowanie zasady Hamiltona nie jest sformułowaniem wariacyjnym dotyczącym ekstremum funkcjonału. W tym bowiem przypadku nie istnieje funkcjonał odpowiadający działaniu Hamiltona w układach z siłami potencjalnymi.

Interpretacja fizyczna zasady (13) jest możliwa na gruncie ogólnej prawidłowości przyrody do minimalizacji nakładu energetycznego w każdym ruchu i w każdym procesie.

W celu uzyskania efektywnych równań ruchu wyrażamy wariację energii kinetycznej bez wariacji czasu, co przy funkcji energii jak w opisie do równań (11) wyrazi się następująco:

$$\delta E = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial E}{\partial q_i} \delta q \ . \tag{14}$$

Całkując przez części wyrażenie:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \ dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{d}{d_t} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt \ , \tag{15}$$

gdzie już wykorzystano zerowanie się wariacji przemieszczeń w końcowych położeniach trajektorii w chwilach t_1 i t_2, tzn. $\delta q_i(t_1) = 0$ i $\delta q_i(t_2) = 0$ - zasadę Hamiltona można teraz wyrazić następująco:

$$(16) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \left[-\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i \, dt = 0 .$$

Ponieważ całka (16) może znikać tylko przy zerowej funkcji podcałkowej, przeto na całej trajektorii musi być:

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} \right] \delta q_i = \sum_{i=1}^{s} Q_i \, \delta q_i ,$$

co wyraża równanie pracy wirtualnej w postaci Lagrange'a. Wobec niezależności przemieszczeń wirtualnych przy równoczesnym niezerowaniu się tych wielkości otrzymamy:

$$(18) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i ;$$

czyli równania Lagrange'a w postaci (11).

Ciąg logiczny takiego otrzymania równań ruchu jest znacznie krótszy i bardziej przejrzysty. Zawiera bowiem fundamentalną zasadę przyrody - tutaj minimum całki Hamiltona (13) oraz krótkie przejście do dostatecznie ogólnej postaci równań ruchu (18).

Podsumowując rozważania dotyczące podstaw teorii mechaniki można stwierdzić, że przekształcenie równań Newtona na równania Lagrange'a jest mało efektywne dydaktycznie. Proponujemy więc, aby w kursie mniej zaawansowanym sformułować równania Lagrange'a wprost jako postulat teorii mechaniki. W kursie bardziej zaawansowanym proponujemy jako postulat teorii sformułować zasadę Hamiltona i z niej otrzymać równania Lagrange'a. W wypowiedzianych uwagach nie bierzemy pod uwagę możliwości innego sformułowania dostatecznie ogólnego postulatu podstawowego, którym może być zasada najmniejszego przymusu Gaussa lub równania Appela.

4. Wnioski końcowe

Zamieszczone w pracy rozważania pozwalają na sformułowanie następujących wniosków końcowych:

- przytaczana w podręcznikach akademickich definicja przemieszczeń wirtualnych nie jest dostatecznie ścisła, a jest przy

tym mało komunikatywna,
- lepszy efekt dydaktyczny może zapewnić definicja przemieszczeń wirtualnych, oparta na pojęciu wariacji przemieszczeń,
- przekształcenie równań Newtona na równania Lagrange'a jest bardzo długie i wyjątkowo nieprzejrzyste, zaś efekt dydaktyczny jest minimalny,
- dla poprawienia efektywności dydaktycznej lepiej sformułować równania Lagrange'a wprost jako postulat teorii mechaniki,
- w bardziej zaawansowanym kursie mechaniki celowym wydaje się sformułowanie jako postulatu zasady Hamiltona i otrzymanie równań ruchu z tej zasady.

LITERATURA

[1] Gutowski R., Mechanika analityczna, PWN, Warszawa 1970
[2] Leyko J., Mechanika ogólna, PWN, Warszawa 1961
[3] Łunc M., Szaniawski A., Zarys mechaniki ogólnej, PWN, Warszawa 1959
[4] Łurie A.I., Analiticzeskaja mechanika, Moskwa 1960
[5] Voltaire, Elementy filozofii Newtona, PWN, Warszawa 1956
[6] Whittaker E.T., Dynamika analityczna, PWN, Warszawa 1959

SOME DIDACTIC QUESTIONS OF ANALYTIC MECHANICS TEACHING

Summary

In This paper some questions of a great importance in teaching the elements of analytic mechanics are refered. These questions are being classified in two categories i. e. definitions and pronciples of the theory of mechanics. There has been taken up a trial to shape some instructive nethods of notions and bases which can be useful in teaching analytic mechanics.

НЕКОТОРЫЕ ДИДАКТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Содержание

В этой работе рассматриваются некоторые дидактические проблемы, которые имеют узловое значение в обучении основ по аналитической механике. Проблемы эти классифицированы в двух категориях: определения понятий, а также принципов теории механики. Начато здесь попытку формулировки дидактически рациональных методов касающихся понятий и принципов, которых практическое использование может принести значительные эффекты в сфере дидактики аналитической механики. Работа эта предназначена для учителей высших учебных заведений профессионально занимающихся преподаванием общей технической и аналитической механики.