

Ewaryst Grodzki
Teresa Tomaszewska

ZAGADNIENIE OGNISK KINETYCZNYCH W POTENCJALNYM
POLU SIŁ CIEŻKOŚCI

1. Wstęp

W ostatnich latach można zaobserwować zwiększone zainteresowanie postulatami teorii mechaniki układów dyskretnych. Postulaty te dla układów dynamicznych holonomicznych były sformułowane dość dawno, przy czym jeden z najważniejszych spośród nich - zasada Hamiltona - w 1834 r., [4]. Inne postulaty mniej więcej w tym samym czasie. Jednakże zagadnienia równoważności teorii mechaniki są już wynikami badań z czasów późniejszych, a z kolei zakres stosowalności zasad mechaniki jest przedmiotem wielu prac współczesnych. Do tego typu zagadnień należy problem ognisk kinetycznych, gdyż wiąże się on z zakresem stosowalności zasady Hamiltona. Celem pracy jest właśnie zbadanie zagadnienia ognisk kinetycznych w potencjalnym polu sił ciężkości w pobliżu powierzchni Ziemi. Problem rozważano na przykładzie rzutu ukośnego, który - jak się wydaje - jest reprezentatywnym przypadkiem ruchu w wymienionym polu, a jako przypadki szczególne wynikają zeń rzut poziomy i swobodny spadek. Z tego względu można mieć nadzieję, że wyniki rozważań dadzą się uogólnić.

nić na inne podobne ruchu wywołane działaniem sił ciężkości.

Uprzedzając dalsze wywody można w uproszczeniu powiedzieć, że występowanie ognisk kinetycznych w pewnym ruchu stawia pod znakiem zapytania stosowalność dla tego przypadku zasady Hamiltona. Z tego względu nie można przeceniać znaczenia rozstrzygnięcia, czy ogniska w rzucie ukośnym istnieją, czy też nie, (choć i sam przypadek jest bez wątpienia technicznie ważny), ale nie można nie doceniać uszczuplenia zakresu stosowalności zasady Hamiltona w przypadku bardzo prostego przecież ruchu w najprostszym spośród znanych w mechanice polu potencjalnym. Gdyby się bowiem okazało, że w opisanym ruchu ogniska rzeczywiście istnieją i zasada Hamiltona nie może być stosowana, to taki dowód wprowadza od razu do mechaniki wątpliwości tym większe, im prostsze było zadanie, gdyż od razu narzuca się pytanie, czy również w bardziej złożonych ruchach nie należy zakwestionować tę podstawową zasadę mechaniki? I dalsze pytanie - jeśli nie zasada Hamiltona, to jaki postulat teorii mechaniki nie prowadzi do sprzeczności?

W uzasadnieniu wyboru tematu pracy należy jeszcze podkreślić rolę i znaczenie zasady Hamiltona jako najogólniejszego fundamentu mechaniki. Taka jej rola sprawia, że zasada ta jest uważana za niewzruszony dogmat. Dlatego nawet najmniejsze wątpliwości związane z jej zastosowaniem powinny być szczegółowo badane. Taka wątpliwość jest zawarta w stosunkowo nowej, bo wydanej w 1971 r. pracy R. Gutowskiego [1], będącej przeglądem współczesnego stanu mechaniki układów dyskretnych i pierwszą tego typu pracą w Polsce. W pracy tej na stronie 132 - 134 autor rozważał właśnie zagadnienie istnienia ognisk kinetycznych w rzucie ukośnym i doszedł do wniosku, że w takim właśnie przypadku ruchu ogniska występują. Jakkolwiek wyraźnie nie jest powiedziane, to przecież z wcześniejszych rozważań autora

wynika wniosek, że działanie Hamiltona nie jest w takim przypadku minimum, a sama zasada nie obowiązuje.

Intuicyjnie takie wnioski muszą budzić wątpliwości, bowiem wydaje się rzeczą nieprawdopodobną, aby tak prosty ruch nie podlegał zasadzie Hamiltona. Również i rachunek przeprowadzony przez autora pracy [1] wydaje się nieprawidłowy, a wyprowadzone wnioski - niesłuszne.

Przytoczone uzasadnienie wyboru tematu pracy sprawia, że rozwiązanie zagadnienia sformułowanego wcześniej wydaje się celowe.

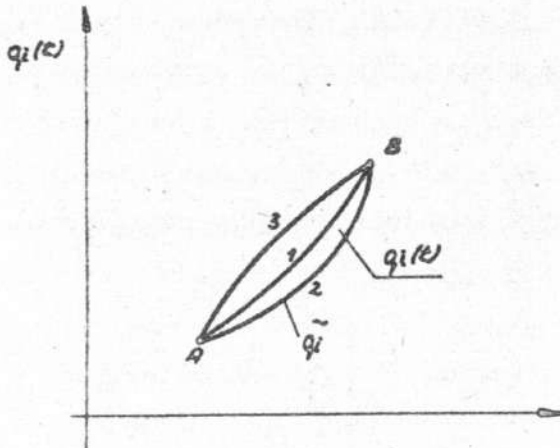
2. Charakter ekstremum działania Hamiltona

Dla jasności wyводу przedstawiono w skrócie założenia i treść zasady Hamiltona.

Rozważano dyskretny układ mechaniczny o s stopniach swobody, skrępowany więzami holonomicznymi. Położenie takiego układu jest w każdej chwili czasu określone przez s współrzędnych uogólnionych Lagrange'a $q_i(t)$, gdzie $i = 1, 2, \dots, s$, a t jest czasem. Na układ działają siły uogólnione potencjalne, dla których istnieje funkcja sił $U = U(q_i, t)$ zależna od współrzędnych uogólnionych i czasu.

Ruch takiego układu można opisać w przestrzeni zdarzeń D_{s+1} [3], utworzonej ze współrzędnych q_i i czasu. Każde chwilowe położenie układu o s stopniach swobody jest w tej przestrzeni określone przez współrzędne jednego punktu, leżące obok siebie punkty krzywej w tej przestrzeni odpowiadają kolejnym położeniom układu dynamicznego (inne warunki, które musi spełniać przestrzeń zdarzeń - w pracy [3]). Ewolucja w czasie rzeczywist-

tego układu dynamicznego będzie reprezentowana w przestrzeni D_{s+1} ruchem, którego torem będzie trajektoria bezpośrednia rzeczywista rys. 1 - wskutek ruchu układ dynamiczny przemieścił



Rys. 1: Ilustracja trajektorii rzeczywistej i porównawczych w przestrzeni zdarzeń

się z początkowego położenia A w końcowe B. Ilustracja rysunkowa ma sens tylko dla jednej współrzędnej $s = 1$, natomiast dla większej liczby współrzędnych rysunek ma tylko znaczenie symboliczne.

Na ogół układ dynamiczny rozpoczynając ruch w położeniu A może się przemieścić w położenie B również po innych torach

kinetycznie możliwych, np. 2 i 3 na rys. 1. Te bliskie kinetycznie możliwe tory są trajektoriami porównawczymi wariacyjnymi. Można je otrzymać z trajektorii rzeczywistej przez dodanie wariacji współrzędnych w następujący sposób

$$(2.1) \quad \tilde{q}_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

gdzie $\tilde{q}_i(t)$ tworzą tor kinetycznie zmieniony - symbol δ oznacza wariację.

O trajektoriach bezpośredniej i wariacyjnych zakłada się, że są bliskie w sensie bliskości pierwszego rzędu, a współrzędne $q_i(t)$ oraz $\tilde{q}_i(t)$ w każdej chwili spełniają równanie nałożonych na układ więzów geometrycznych.

Za ruch opisanego układu dynamicznego jest odpowiedzialna funkcja Lagrange'a w postaci

$$(2.2) \quad L(q_i, \dot{q}_j, t) = E(q_i, \dot{q}_j, t) - U(q_i, t) ,$$

$$i, j = 1, 2, \dots, s$$

$$(\dot{}) = \frac{d}{dt} ,$$

gdzie E jest energią kinetyczną układu.

Przyjęcie funkcji Lagrange'a w postaci (2.2) jest formalnym odpowiednikiem stwierdzenia, że stan mechaniczny układu jest w zupełności określony przez współrzędne i prędkości uogólnione tzn. odpowiednio q_i i \dot{q}_j ; - ewentualnie również czas. Utworzony z funkcji Lagrange'a funkcjonał

$$(2.3) \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_j, t) dt$$

nazywa się działaniem Hamiltona.

Zasada Hamiltona stanowi kryterium, który z ruchów kinetycznie możliwych jest ruchem rzeczywistym lub też interpretując ruch w przestrzeni zdarzeń, która trajektoria jest trajektorią bezpośrednią. Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjału

(2.3) ma postać :

$$(2.4) \quad \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_j, t) dt = 0$$

i wyraża zasadę Hamiltona, którą słowami można wyrazić następująco :

Spośród bliskich trajektorii możliwych przechodzących w chwilach t_1 i t_2 przez te same punkty w przestrzeni zdarzeń trajektorią rzeczywistą układu mechanicznego holonomicznego obciążonego siłami potencjalnymi jest taka trajektoria, na której działanie Hamiltona ma wartość ekstremalną.

Tak sformułowaną zasadę można uważać za postulat teorii me-

chaniki odpowiednich układów dynamicznych.

Jednakże zasada Hamiltona nie stanowi rozstrzygnięcia, czy ekstremum działania jest maksimum czy minimum. Aby zbadać charakter tego ekstremum oblicza się pierwszą wariację działania, tzn.

$$(2.5) \quad \begin{cases} \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_j, t) dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt ; \quad i = 1, 2, \dots, s, \end{cases}$$

gdzie powtórzenie wskaźnika tu i dalej oznacza zastosowanie konwencji sumacyjnej. Tutaj należy zaznaczyć, że wariację funkcjonału oblicza się bez wariacji czasu, gdyż ta ostatnia oznacza jak wiadomo przyrost wartości funkcjonału pochodzący od ruchu unoszenia więzów, a ruch ten z kolei nie ma wpływu na wartość przesunięć wirtualnych układu.

Biorąc za punkt wyjścia pierwszą wariację (2.5) oblicza się z kolei drugą wariację działania Hamiltona. Wariację tę będą tworzyć drugie wyrazy rozwinięcia w szereg Taylora funkcji L. W wyniku otrzymuje się :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \delta^2 S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_i \delta q_j + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \delta q_i \delta \dot{q}_j + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_j \right) dt \end{cases}$$

Ponieważ :

$$\delta q = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{q} (\delta q_i) \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{dq}{dt} (\delta q_i) \right| dt = \left| \int_{t_1}^{t_2} \delta \dot{q}_i dt \right| = \beta (t_2 - t_1)$$

gdzie

$$\beta = \left| \max \delta \dot{q}_j \right|$$

jest największą wartością wariacji prędkości uogólnionej w przedziale czasu $t_1 - t_2$, to wobec tego wyrażenie :

$$|\delta q_i| = \beta(t_2 - t_1)$$

można zmniejszając przedział czasu uczynić dowolnie małym. Tym samym dowolnie małą wartość może przyjąć suma dwóch pierwszych całek wchodzących do drugiej wariacji $\delta^2 S$. Mamy bowiem :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_i \delta q_j + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \delta q_i \delta \dot{q}_j \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_j + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \delta q_i dt = \\ &= \frac{1}{2} \beta(t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_j + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt. \end{aligned}$$

Przy $t_2 - t_1 \rightarrow 0$ również $I \rightarrow 0$, a zatem o znaku drugiej wariacji decydować będzie już tylko wyrażenie :

$$(2.7) \quad \delta^2 S \approx \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j dt.$$

Ponieważ między funkcją Lagrange'a i pędami uogólnionymi p_i jest związek, [4] :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} ,$$

a z kolei między energią kinetyczną i pędami, [4] :

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} = p_i ,$$

to wobec tego można napisać :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}$$

Za pomocą tej zależności wartość główną drugiej wariacji (2.7) można przedstawić w postaci :

$$(2.8) \quad \delta^2 S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_j dt .$$

Można okazać, że współczynniki :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

są równe współczynnikom a funkcji energii układu zapisanej w formie kwadratowej postaci, [4] :

$$(2.9) \quad E = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + b_i \dot{q}_i + c .$$

Wynika to z przekształceń

$$\dot{p}_j = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} = a_{ij} \dot{q}_i + b_j$$

oraz :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial \dot{q}_i} (a_{ij} \dot{q}_i + b_j) = a_{ij} .$$

Ponieważ energia kinetyczna jest formą dodatnio określoną, wobec tego dla funkcji podcałkowej (2.8) słuszna jest nierówność :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_j = \frac{1}{2} a_{ij} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_j = E(\delta \dot{q}_i) > 0.$$

Tym samym słuszne jest również stwierdzenie, że :

$$(2.10) \quad \delta^2 S \approx \int_{t_1}^{t_2} E(\delta \dot{q}_j) dt > 0.$$

Z (2.10) wynika, że dla dostatecznie małego przedziału czasu działanie Hamiltona na trajektorii rzeczywistej przajmuje wartości minimalne w porównaniu z wartościami na trajektoriach wariacyjnych kinetycznie możliwych.

3. Zagadnienie ognisk kinetycznych w przypadku ogólnym

Poprzednio stwierdzono, że w dostatecznie małym przedziale czasu $\delta^2 S > 0$. Teraz będzie chodziło o zbadanie przypadków, kiedy taki warunek ma miejsce.

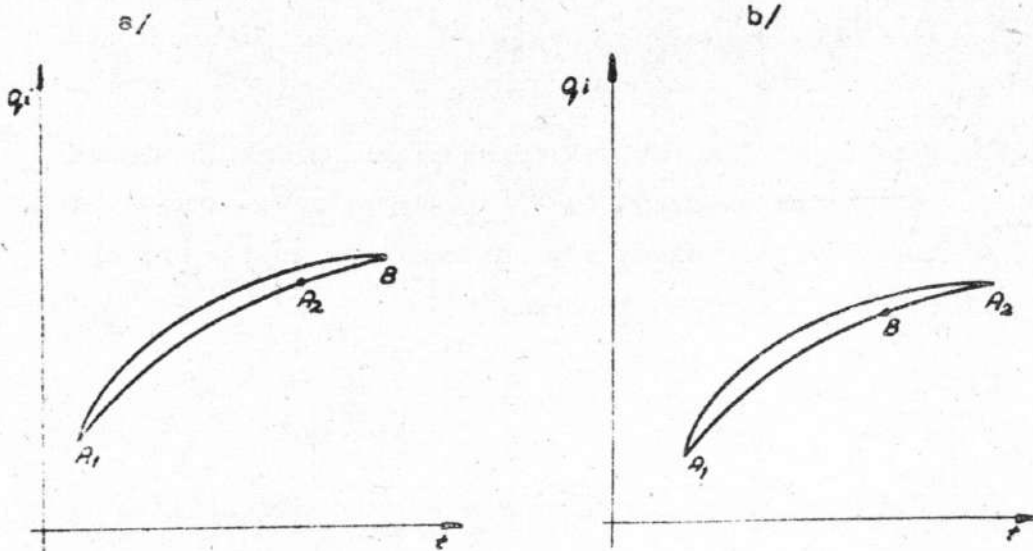
W tym celu bierze się pod uwagę część trajektorii rzeczywistej $A_1 B$ jak na rys. 2. Przypuśćmy, że z punktu A_1 można poprowadzić inną trajektorię rzeczywistą, taką że :

- druga trajektoria jest nieskończenie bliska pierwszej,
- kąt między obu trajektoriami jest na całej długości nieskończenie mały,
- ruch po obu trajektoriach odbywa się w tym samym przedziale czasu $t_1 - t_2$.

Jeśli przy takich założeniach druga trajektoria przecina się po raz drugi z pierwszą np. w punkcie B (rys. 2 a), to punkt B nazywa się ogniskiem kinetycznym punktu A_1 , lub punktem sprzężonym z A_1 . W ognisku kinetycznym B druga wariacja działania Hamiltona

$$(3.1) \quad \delta S = 0,$$

a zatem działanie nie jest ani maksimum, ani minimum.



Rys. 2. Możliwe położenia ognisk kinetycznych na trajektoriach rzeczywistych

Jeżeli punkt końcowy A_2 trajektorii rzeczywistej leży pod ogniskiem kinetycznym B , wtedy na trajektorii rzeczywistej $A_1 A_2$ działanie Hamiltona osiąga minimum (z wykluczeniem punktu $A_2 = B$).

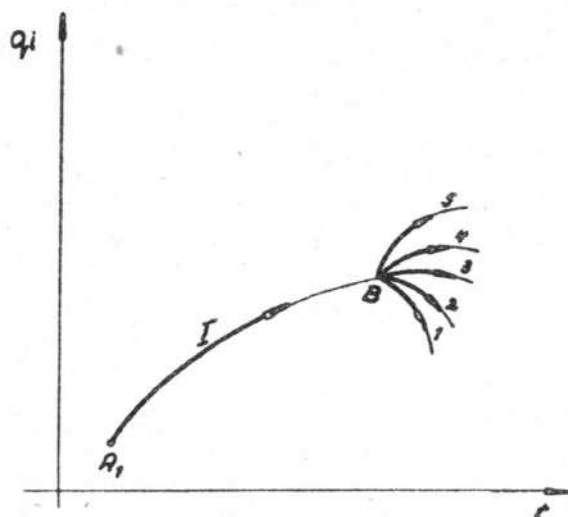
Jeżeli punkt końcowy A_2 trajektorii rzeczywistej znajduje się w punkcie B lub poza nim (rys. 2 b), wtedy działanie Hamiltona nie jest ani maksimum, ani minimum.

Obecność ogniska kinetycznego na torze rzeczywistym oznacza, że przy ruchu punktu reprezentującego w przestrzeni $D_{3,1}$ z chwilą przekroczenia ogniska ma miejsce warunek (3.1), a zatem ruch nie podlega już zasadzie Hamiltona. Sytuację, gdy działanie nie jest ani maksimum, ani minimum można w warunkach statycznych przyrównać do chwiejnej równowagi ciała. Biorąc

najprostszy przypadek takiej równowagi - ciężka kula podparta w najwyższym punkcie inną powierzchnią kulistą utrzymuje równowagę chwiejną, po utracie której zapoczątkowanie ruchu nie jest związane z jakimkolwiek wyróżnionym kierunkiem. Wszystkie kierunki staczania się kuli są dopuszczalne i możliwe.

Podobnie układ dynamiczny osiągając ognisko kinetyczne może zapoczątkować ruch, którego nie da się z góry przewidzieć.

Interpretując taki ruch w przestrzeni zdarzeń można powiedzieć, że po osiągnięciu przez punkt reprezentujący ogniska kinetycznego każdy dowolny ruch staje się możliwy. Graficzną ilustrację takiej sytuacji przedstawiono na rys. 3, gdzie po-



Rys. 3. Graficzna ilustracja przestrzeni zdarzeń ruchów możliwych po osiągnięciu ogniska kinetycznego

cząwszy od ogniska B dalszy ruch jest możliwy po różnych trajektoriach, np. 1 ÷ 5.

Można zatem stwierdzić, że obecność ogniska kinetycznego w pewnym ruchu ma daleko idące skutki. Oprócz tego, że ruch nie podlega zasadzie Hamiltona dochodzi element całkowitej przypadkowości w kontynuowaniu ruchu po przekroczeniu ogniska kinetycznego. Tutaj z całą

mocą ujawnia się fakt, że w takim przypadku nie można polegać na zasadzie determinizmu mechanicznego, uważanej za pewnik od czasów Newtona i Lagrange'a. Zasada ta polega jak wiadomo na tym, że znając stan mechaniczny układu w chwili początkowej, na który składa się znajomość wszystkich położenia i prędkości uogólnionych przy $t = 0$, oraz znając siły obciążające układ

można w sposób jednoznaczny przewidzieć przyszłe losy tego układu. Z przytoczonej dyskusji na temat ognisk kinetycznych widać, że w przypadku obecności takich ognisk brak jest jednoznaczności co do przyszłości układu, a zatem nie obowiązuje zarówno zasada Hamiltona, jak i zasada determinizmu mechanicznego.

Podobnie ma się rzecz przy badaniu pewnych układów nieholonomicznych, ale te problemy wykraczają poza zakres pracy.

Przedstawione tutaj rozważania związane z ogniskami kinetycznymi mają charakter geometryczny i tylko opisowo stwierdzają, kiedy ma miejsce minimum działania Hamiltona, ale nie rozstrzygają, czy na pewnej trajektorii rzeczywistej ogniska kinetyczne istnieją, czy też nie. Prócz tego rozważania te nie dają sposobu na efektywne wyznaczenie takich ognisk. Ten problem nie jest w literaturze dostatecznie rozpracowany i dlatego każde zagadnienie wymaga indywidualnego podejścia, jakkolwiek można znaleźć próby (np. w [2]) ogólniejszego potraktowania sposobu wyznaczania ognisk kinetycznych. Próbę taką również podjęto w dalszej części pracy.

4. Rozwiązanie szczegółowe zagadnienia ogniska kinetycznego w rzucie ukośnym

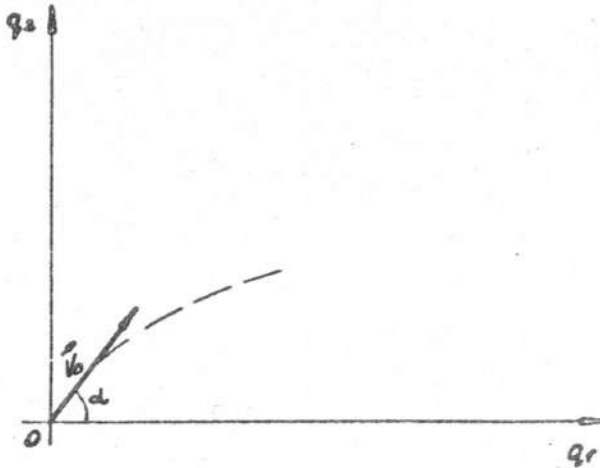
Parametryczne równania takiego ruchu mają jak wiadomo postać :

$$(4.1) \quad \begin{cases} q_1 = v_0 t \cos \alpha ; \\ q_2 = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} , \end{cases}$$

gdzie współrzędne q_1 i q_2 oraz warunki początkowe :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \dot{q}_1(0) = v_0 \cos \alpha & ; & q_1(0) = 0 & ; \\ \dot{q}_2(0) = v_0 \sin \alpha & ; & q_2(0) = 0 & , \end{cases}$$

zaznaczono na rysunku 4.



Rys. 4. Współrzędne uogólnione i warunki początkowe rzutu ukośnego

Rozpatrywany układ jest swobodny i ma dwa stopnie swobody.

Kierując się omówionymi wcześniej ogólnymi wskazówkami pozwalającymi na stwierdzenie istnienia ognisk kinetycznych utworzono przede wszystkim ruch zmieniony kinetycznie możliwy traktując ruch opisany równaniami (4.1)

jako ruch pierwotny rzeczywisty. Mając na uwadze, by różnice wartości współrzędnych na obu wymienionych trajektoriach oraz by różnice między pochodnymi obu trajektorii na całej długości były małe wprowadzono zmieniony ruch rzeczywisty nadając pewne wariacyjne przyrosty początkowym parametrom ruchu według przyporządkowania

$$(4.3) \quad v_0 \rightarrow v_0 + \delta v_0 \quad \text{oraz} \quad \alpha \rightarrow \alpha + \delta \alpha$$

Tak utworzony ruch zmieniony będzie również ruchem rzeczywistym, gdyż przy realizacji rzutu nie ma ograniczeń dla prędkości v_0 ani kąta rzutu α . Bliskość trajektorii zmienionej

zapewnia wariacyjny przyrost parametrów.

Parametryczne równania ruchu zmienionego będą dalej oznaczane przez \tilde{q}_1 i \tilde{q}_2 i mają postać :

$$(4.4) \quad \begin{cases} \tilde{q}_1 = (v_0 + \delta v_0)t \cos(\alpha + \delta\alpha); \\ \tilde{q}_2 = (v_0 + \delta v_0)t \sin(\alpha + \delta\alpha) - \frac{gt^2}{2}; \end{cases}$$

Z kolei równania (4.4) przekształcono tak, aby współrzędne ruchu zmienionego \tilde{q}_i przedstawić za pomocą współrzędnych ruchu pierwotnego i pewnych wariacji współrzędnych - tak jak jest zapisana relacja (2.1) . W tym celu (4.4) rozwinięto jak niżej :

$$(4.5) \quad \begin{cases} q = v_0 t \cos\alpha \cos\delta\alpha - v_0 t \sin\alpha \sin\delta\alpha + \\ + \delta v_0 t \cos\alpha \cos\delta\alpha - \delta v_0 t \sin\alpha \sin\delta\alpha; \\ q = v_0 t \sin\alpha \cos\delta\alpha + v_0 t \cos\alpha \sin\delta\alpha + \\ + \delta v_0 t \sin\alpha \cos\delta\alpha + \delta v_0 t \cos\alpha \sin\delta\alpha - \\ - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Funkcje trygonometryczne zawierające wariacje $\delta\alpha$ rozwinięto w szereg Taylora wokół punktu 0, zatrzymując w rozwinięciu wyrazy stopnia zerowego i pierwszego. Zatrzymanie tych wyrazów rozwinięcia jest podyktowane potrzebą zapewnienia ruchowi zmienionemu w stosunku do podstawowego bliskości pierwszego rzędu.

W wyniku tych operacji otrzymano :

$$(4.6) \quad \begin{cases} \tilde{q}_1 = v_0 t \cos\alpha - v_0 t \sin\alpha \delta\alpha + \delta v_0 t \cos\alpha; \\ \tilde{q}_2 = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} + v_0 t \cos\alpha + \delta v_0 t \sin\alpha \end{cases}$$

Jest widoczne, że w równaniach (4.6) wystąpiły teraz w sposób jawny równania ruchu podstawowego i w ten sposób związki te można teraz napisać w postaci :

$$(4.7) \quad \begin{cases} \tilde{q}_1 = q_1 - v_0 t \sin \alpha \delta_\alpha + \delta v_0 t \cos \alpha ; \\ \tilde{q}_2 = q_2 + v_0 t \cos \alpha \delta_\alpha + \delta v_0 t \sin \alpha . \end{cases}$$

Zagadnienie istnienia ognisk kinetycznych można teraz rozstrzygnąć, analizując równania (4.7) .

Mianowicie na to, aby trajektorie obu ruchów przecinały się po upływie takiego samego czasu t , potrzebne jest równoczesne spełnienie układu równań :

$$(4.8) \quad \begin{cases} -v_0 t \sin \alpha \delta_\alpha + \delta v_0 t \cos \alpha = 0 ; \\ v_0 t \cos \alpha \delta_\alpha + \delta v_0 t \sin \alpha = 0 . \end{cases}$$

gdź tylko wówczas $\tilde{q}_1 = q_1$ oraz $\tilde{q}_2 = q_2$.

Wobec niezależności od siebie wariacji kąta i prędkości zarówno pierwsze jak i drugie równanie (4.8) będzie spełnione, jeżeli kąt α będzie spełniał jednocześnie układ równań:

$$(4.9) \quad \sin \alpha = 0 \quad \text{oraz} \quad \cos \alpha = 0 .$$

Jest widoczne, że żadne z rozwiązań pierwszego równania (4.9) , które ma postać

$$\alpha = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots ,$$

nie pokrywa się z żadnym z rozwiązań drugiego równania (4.9) , bowiem te ostatnie mają postać

$$\alpha = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Układ równań (4.9) nie ma zatem wspólnych rozwiązań i jest wobec tego sprzeczny. Tak samo sprzeczny jest układ (4.8), gdyż równania (4.9) stąd właśnie pochodzą.

Jeśli tak, to można sformułować wniosek, że trajektorie bliskie q_1 oraz \tilde{q}_1 wyrażone odpowiednimi równaniami (4.1) i (4.7) nie mają na całej długości żadnych punktów wspólnych. Wobec tego dla początkowego punktu O trajektorii nie ma punktu sprzężonego, czyli że w rozpatrywanym ruchu ogniska nie istnieją na żadnej trajektorii rzeczywistej.

Zagadnienie ognisk kinetycznych ma więc w tym przypadku rozwiązanie negatywne, ale właśnie wtedy pozostaje w mocy zasada Hamiltona oraz zasada determinizmu mechanicznego.

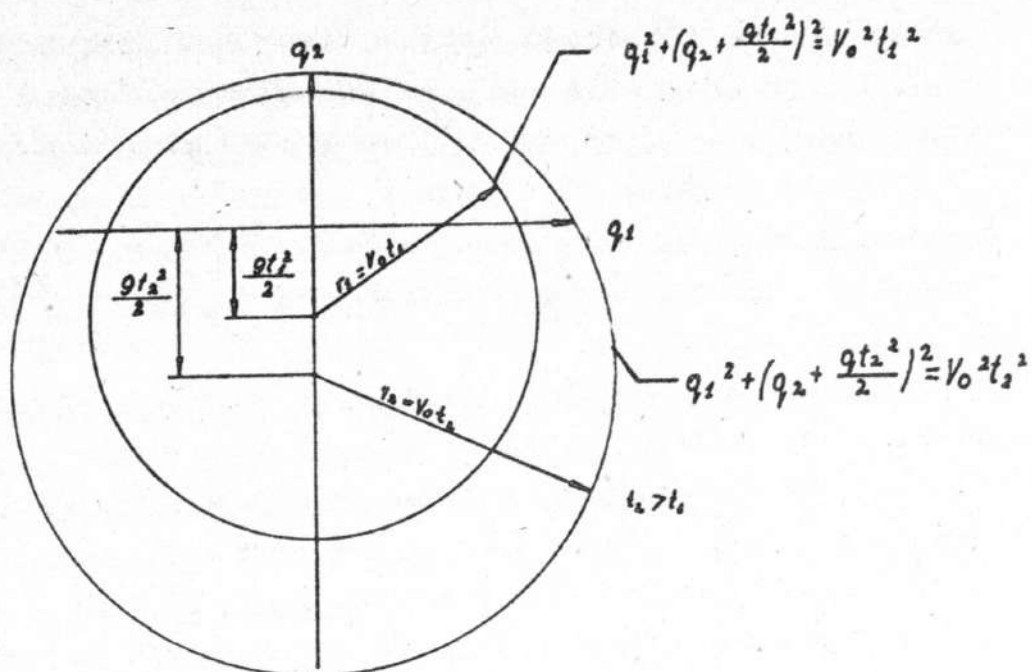
Jako dowód poprawności przedstawionego rozumowania i rachunku można przedstawić inne - interesujące jak się wydaje - rozważania, które również wykluczają istnienie ognisk kinetycznych w rozpatrywanym ruchu.

Uważajmy mianowicie w równaniach (4.1) za zmienny parametr kąt rzutu α przy równoczesnym dopuszczeniu zmienności czasu t , ale utrzymaniu stałości v_0 . Rugując w tych równaniach kąt α dochodzi się do równania

$$(4.10) \quad q_1^2 + \left(q_2 + \frac{gt^2}{2} \right)^2 = v_0^2 t^2.$$

Jest to równanie okręgu o zmiennym w czasie położeniu środka i zmiennym promieniu. Okręgi takie dla dwóch różnych chwil czasu t_1 i t_2 przy czym $t_2 > t_1$ pokazano na rys. 5. Równania tych okręgów mają odpowiednio postać

$$(4.11) \quad \begin{cases} q_1^2 + \left(q_2 + \frac{gt_1^2}{2} \right)^2 = v_0^2 t_1^2 ; \\ q_1^2 + \left(q_2 + \frac{gt_2^2}{2} \right)^2 = v_0^2 t_2^2 . \end{cases}$$



Rys. 5. Położenia wyrzuconych ukośnie punktów przy różnych kątach rzutu i dwóch różnych chwilach czasu

Z równań tych wynika, że współrzędna q_{2_0} środka okręgu jest w dowolnej chwili czasu równa :

$$q_{2_0} = - \frac{gt^2}{2}$$

i zmienia się, jak współrzędna punktu przy swobodnym jego spadku, natomiast druga jego współrzędna $q_{1_0} = 0$. Promień okręgu zmienia się w czasie według równania :

$$r = v_0 t ,$$

czyli okrąg rozprzestrzenia się w czasie ze stałą prędkością równą początkowej prędkości rzutu.

Ponieważ ognisko kinetyczne - o ile istnieje - musi być osiągnięte przy ruchu po dwóch bliskich trajektoriach w tym

samym czasie, wobec tego na podstawie analizy rysunku 5 oraz równań (4.11) można stwierdzić, że w rozpatrywanym ruchu ogniska nie istnieją, gdyż niewielka zmiana kąta rzutu powoduje, że punkt znajdzie się w bliskim, ale nie tym samym miejscu na okręgu o równaniu (4.10). Poszczególne punkty tego okręgu są bowiem miejscami, do których ruchomy punkt przybywa w tym samym czasie t .

Jakkolwiek powyższy dowód wykluczający istnienie ognisk kinetycznych podano tylko w przypadku zmienności kąta rzutu, to jednak łatwo można zauważyć, że zmiana prędkości początkowej rzutu nie spowoduje jakościowej zmiany przebiegu ruchu. Po prostu promień okręgu będzie mieć większą lub mniejszą wartość, ale charakter ruchu po trajektoriach zostanie taki sam. To stwierdzenie staje się oczywiście, jeśli zważy się że prędkości v_0 wchodzą do równań (4.1) zachowując addytywne własności tych równań:

Przedstawione dwa dowody dotyczące istnienia ognisk kinetycznych w rzucie ukośnym można więc uważać za rozwiązanie zagadnienia sformułowanego we wstępie pracy.

5. Próba sformułowania warunków pozwalających na wyznaczenie ognisk w przypadku ogólnym

Opierając się na otrzymanych wynikach podjęto z kolei próbę uzyskania warunków pozwalających na wyznaczenie ognisk kinetycznych w przypadku ogólnym - bez wiązania sposobu z określonym z góry ruchem.

Założono, że układ jest zachowawczy i jest skrępowany więzami holonomicznymi skleronomicznymi. Nie zmniejszy się ogólnie

ności rozważań jeśli przyjąć, że w chwili początkowej $t_1 = 0$ warunki początkowe mają postać $q_i(0) = 0$.

Posłużono się tutaj metodą podobną do zaproponowanej przez Łuriego w pracy [2].

Zadanie polega na znalezieniu ogniska kinetycznego sprzężonego z położeniem początkowym $q_i(0) = 0$, o ile ono istnieje.

Ruch scharakteryzowanego wcześniej układu można określić równaniami :

$$(5.1) \quad \begin{aligned} q_i(t) &= q_i(t, p_1^1, p_2^1, \dots, p_s^1) = q_i(t, P_j^1) ; \\ i, j &= 1, 2, \dots, s , \end{aligned}$$

gdzie p_j^1 są pędami uogólnionymi w chwili $t_1 = 0$.

Jeśli w chwili t_2 układ dynamiczny osiągnie ognisko kinetyczne, to wówczas współrzędne będą równe

$$(5.2) \quad q_i(t_2) = q_i(t, p_j^1) .$$

Nadając pędom początkowym p_i^1 przyrosty δp_i^1 tworzymy bliską

trajektorię rzeczywistą w ruchu zmienionym :

$$(5.3) \quad \begin{cases} \tilde{q}_i(t, p_1^1) + \delta p_1^1, p_2^1 + \delta p_2^1 \dots + p_s^1 + \delta p_s^1 = \\ = \tilde{q}_i(t, p_j^1 + \delta p_j^1) . \end{cases}$$

Współrzędne (5.3) trajektorii ruchu zmienionego rozwijamy w szereg Taylora zatrzymując część główną oraz wyrazy liniowe. Będzie wówczas :

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \tilde{q}_i(t, p_j^1 + \delta p_j^1) &= q_i(t, p_j^1) + \frac{\partial q_i}{\partial p_j^1} \delta p_j^1 + \dots \\ i, j &= 1, 2, \dots, s , \end{aligned}$$

$$(5.8) \quad \Delta(t_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial p_1^1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial p_s^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q_s}{\partial p_1^1} & \dots & \frac{\partial q_s}{\partial p_s^1} \end{vmatrix} = 0$$

jest równy zero. Wynika to z faktu, że układ równań (5.7) jest jednorodny i warunkiem na to, by miał nietrywialne rozwiązania jest, ażeby wyznacznik charakterystyczny był zerowy.

Spełnienie warunku (5.8) oznacza, że punkt reprezentujący w przestrzeni zdarzeń układ dynamiczny może się przemieścić z położenia początkowego do pewnego innego zarówno po rzeczywistej trajektorii podstawowej :

$$q_i = q_i(t, p_j^1) ; \quad i, j = 1, 2, \dots, s$$

oraz po bliskich poprzedniej rzeczywistych trajektoriach zmienionych :

$$\tilde{q}_i = q_i(t, p_j^1 + \delta p_j^1) ; \quad i, j = 1, 2, \dots, s.$$

Trajektorie te spotykają się w pewnym punkcie B, punkt ten jest zatem ogniskiem kinetycznym osiąganym przez punkt reprezentujący w chwili czasu t_2 - spełnia bowiem warunki określające ognisko kinetyczne.

Jeżeli jacobian (5.8) jest równy zeru, to układ równań (5.7) ma nieskończenie wiele rozwiązań - czyli trajektorii bliskich i rzeczywistych jest nieskończenie wiele, przy czym wszystkie spotykają się w ognisku kinetycznym.

Jeżeli jacobian ten jest różny od zera, to układ (5,7) nie ma wcale rozwiązań i wobec tego w danym ruchu trajektorie rze-

czywista nie zawiera ognisk kinetycznych, a działanie Hamiltona jest minimum na całej trajektorii.

Przedstawiony wyżej sposób ogólny wyznaczania ognisk zastosowano jeszcze do rozwiązanego wcześniej zagadnienia szczegółowego.

Mianowicie oznaczając masę wyrzucanego punktu przez m można na podstawie równań (4.1) napisać pędy uogólnione w postaci

$$(5.9) \quad \begin{cases} p_1 = m v_0 \cos \alpha & ; \\ p_2 = m v_0 \sin \alpha - mgt \end{cases}$$

Pędy te w chwili początkowej są równe

$$(5.10) \quad \begin{cases} p_1'(0) = m v_0 \cos \alpha & ; \\ p_2'(0) = m v_0 \sin \alpha & . \end{cases}$$

Współrzędne uogólnione wyrażone przez pędy początkowe będą teraz :

$$(5.11) \quad \begin{cases} q_1 = \frac{t p_1'}{m} & ; \\ q_2 = \frac{t p_2'}{m} - \frac{gt^2}{2} & . \end{cases}$$

Tworzymy jacobian

$$(5.12) \quad t = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial p_1'} & \frac{\partial q_1}{\partial p_2'} \\ \frac{\partial q_2}{\partial p_1'} & \frac{\partial q_2}{\partial p_2'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m t & 0 \\ m t & 0 \end{vmatrix} = \frac{m t}{m} \neq 0$$

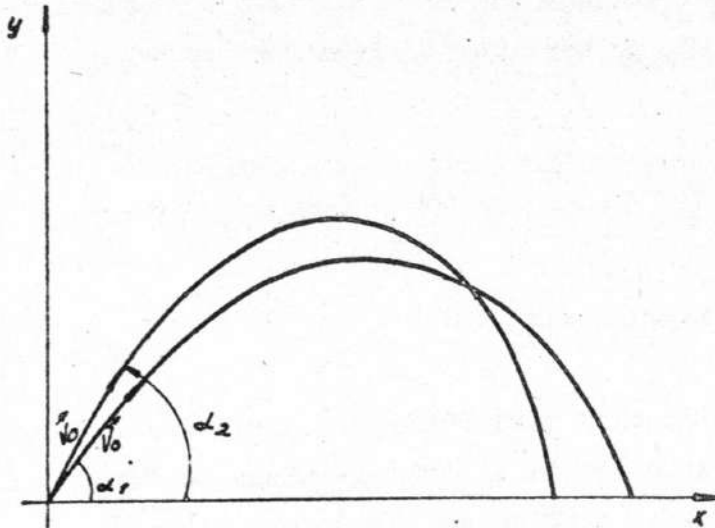
który jest różny od zera dla każdej chwili czasu z wyjątkiem $t_1 = 0$, ale położenie odpowiadające tej chwili było wykluczone. Czyli i tutaj otrzymuje się potwierdzenie słuszności rozwiązań poprzednich.

6. Końcowe wnioski i uogólnienia

W podsumowaniu rozważań można stwierdzić, że postawione zadanie rozstrzygnięcia, czy w rzucie ukośnym istnieją na trajektorii rzeczywistej ogniska kinetyczne, czy nie - zostało trzema sposobami rozwiązane, a sposoby dowodu nie powinny budzić wątpliwości. Dokonując krytycznej analizy tego samego przypadku rozpatrywanego przez prof. R. Gutowskiego, [1], należy stwierdzić, że tam autor wziął za ognisko kinetyczne punkt przecięcia się dwóch trajektorii - ale taki punkt - który warunków ogniska nie spełnia. [REDACTED]

[REDACTED] Trajektorie rzutów wykonanych z tymi samymi prędkościami, ale pod różnymi kątami przecinają się, (rys. 6), lecz nie są to ani trajektorie bliskie, ani też punkt przecięcia nie jest osiągalny na obu trajektoriach w tym samym czasie. Zatem pogląd, że punkt przecięcia się takich trajektorii jest ogniskiem kinetycznym jest błędny. To przecinanie się trajektorii wynika przecie z faktu, że dwa rzuty, z których jeden jest wykonany pod kątem α , a drugi pod kątem $90^\circ - \alpha$ mają taki sam zasięg. [REDACTED]

[REDACTED].
Uzyskane wyniki badań nad rzutem ukośnym można uogólnić również na ruchy pokrewne, jak poziomy i swobodny spadek, bowiem te ostatnie są szczególnymi przypadkami pierwszego. Mianowicie



Rys. 6. Przecinanie się trajektorii ruchu przy różnych rzutach nie związane z istnieniem ognisk kinetycznych

rzut poziomy traktować można jako rzut ukośny od chwili osiągnięcia przez punkt najwyższego położenia na torze. Nieznacznej zmianie ulegają tylko wartości liczbowe warunków początkowych takiego ruchu. Swobodny spadek jest dal-

szym uproszczeniem poprzednich ruchów.

Uogólniając rozważania można więc powiedzieć, że w różnych przypadkach ruchu punktu w polu sił ciężkości ogniska kinetyczne nie występują i na wszystkich trajektoriach rzeczywistych takich ruchów działanie Hamiltona jest minimum, a sama zasada pozostaje w mocy.

W uzupełnieniu uogólnienia można dodać, że skuteczna przy rozstrzygnięciu o istnieniu ognisk może być również metoda przedstawiona w punkcie 4. Jej zaletą jest duża prostota, choć zastrzec się należy, że metoda ta nie jest dostatecznie sprawdzona. Takie zastrzeżenie wyraża również Curie, [2].

Literatura

- [1] Gutowski R., Mechanika analityczna, PWN Warszawa, 1971
- [2] Дурье.А.И., Аналитическая механика, Г.И.Ф.- М.Л.Москва
- [3] Nejmark J.I., Pufajew N.A., Dynamika układów nieholonomicznych. Tłum. z ros., PWN Warszawa, 1971
- [4] Whittaker E.T., Dynamika analityczna, Tłum. z ang., PWN Warszawa, 1959.

Streszczenie

Praca zawiera rozwiązanie zagadnienia występowania ognisk kinetycznych w rzucie ukośnym i pokrewnych. Po zdefiniowaniu związanych z tematem pojęć i naszkicowaniu odpowiedniej teorii rozpatrzono zagadnienie szczegółowo. W wyniku rozważań podano dowody wykluczające istnienie takich ognisk na rzeczywistej trajektorii punktu. Dowody są oparte na szczegółowej analizie otrzymanych w pracy rozwiązań. Tym samym wykazano, że rozpatrywane ruchy podlegają zasadzie Hamiltona, gdyż działanie podczas ruchu jest na całej trajektorii minimum. Wykazano, że dowód istnienia ognisk przedstawiony w jednej z cytowanych prac jest błędny. W końcowej części pracy podjęto próbę uogólnienia sposobu wyznaczania ewentualnych ognisk również w innych przypadkach.