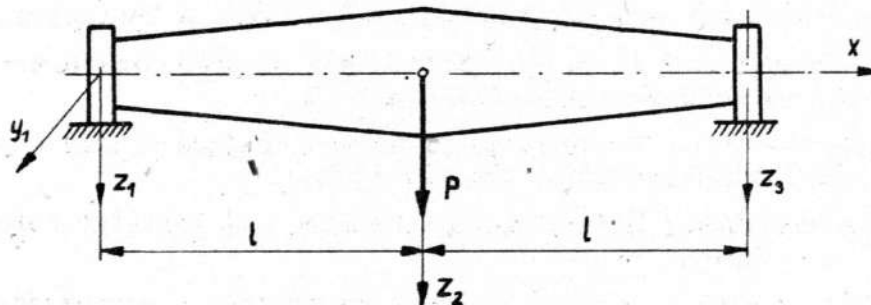


Arnold Wilczyński

STATECZNOŚĆ PŁASKIEJ POSTACI ZGINANIA BELKI  
O ZMIENNYM PRZEKROJU OBCIĄŻONEJ SIŁĄ SKUPIONĄ

1. W s t ę p

W pracy rozpatrzono zagadnienie stateczności płaskiej postaci zginania belki dwupodporowej o zmiennym przekroju, symetrycznej względem osi  $z_2$ , obciążonej w połowie rozpiętości siłą skupioną



Rys. 1.

ną  $P$  (rys. 1). Przyjęto następujące założenia:

- podpory uniemożliwiają obrót końców belki względem osi  $x$  oraz osi  $z_1$  i  $z_3$ ,
- siła skupiona  $P$  jest zaczepiona na osi sił poprzecznych i jest do niej prostopadła,
- grubość przekroju poprzecznego belki jest stała, a jego wysokość zmienia się liniowo wzdłuż osi  $x$ ,
- sztywność belki na skręcanie nieswobodne jest równa zero,
- osie  $y$  i  $z$  są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego,
- sztywność zginania względem osi  $y$  jest duża w porównaniu ze sztywnością względem osi  $z$ .

Przy powyższych założeniach wyprowadzono równania różniczkowe równowagi obojętnej belki, po czym sprowadzono je do układu równań całkowych. W celu rozwiązania tego układu zastosowano metodę kolejnych przybliżeń, następnie wykorzystując symetrię odkształcenia zwichrzonej belki, otrzymano warunek służący do określenia pierwszych krytycznych wartości obciążenia.

Przeprowadzono obliczenia numeryczne, których wyniki dotyczą belek o przekroju w kształcie wydłużonego prostokąta.

Zagadnienie podobne do rozpatrywanego w niniejszej pracy rozważył S. Wiśniewski [3]. Zajął on się zagadnieniem stateczności płaskiej postaci zginania belki w kształcie płaskownika z symetrycznie ściętymi narożami, podobnie obciążonej, ale w inny sposób podpartej na swych końcach.

## 2. R ó w n a n i a   r ó ż n i c z k o w e   r ó w n o w a g i o b o j ę t n e j

Położenie dowolnego przekroju poprzecznego belki po utracie stateczności można określić za pomocą trzech składowych (rys. 2):

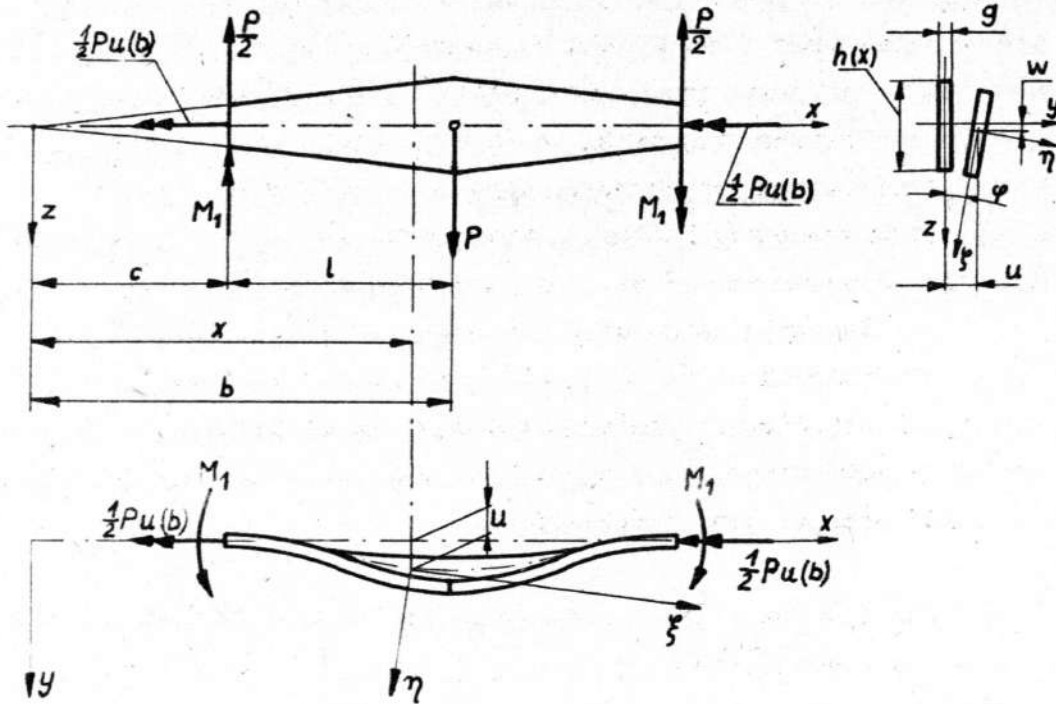
- przemieszczenia  $u$  środka ciężkości przekroju w kierunku osi  $y$ ,
- przemieszczenia  $w$  środka ciężkości przekroju w kierunku osi  $z$ ,
- kąta obrotu  $\psi$  przekroju w płaszczyźnie  $yz$ .

Dla dowolnego  $x$  w przedziale  $c \leq x \leq b$  składowe momentów wynoszą

$$(2.1) \quad \begin{aligned} M_x &= -\frac{\rho}{2} [u(b) - u(x)] \\ M_y &= -\frac{\rho}{2} (x - c) \\ M_z &= -M_1, \end{aligned}$$

przy czym  $M_1$  oznacza moment oddziaływania utwierdzenia w płaszczyźnie  $yz$ .

Wprowadzając lokalny układ osi  $\xi, \eta, \zeta$ , związany ze zwichrzonym przekrojem w miejscach  $x$ , możemy momenty zginające  $M_\eta$  i  $M_\zeta$  oraz moment skręcający  $M_\xi$  wyrazić za pomocą wzorów



Rys. 2.

$$\begin{aligned}
 M_\eta &= M_x \cos(x, \eta) + M_y \cos(y, \eta) + M_z \cos(z, \eta), \\
 (2.2) \quad M_\xi &= M_x \cos(x, \xi) + M_y \cos(y, \xi) + M_z \cos(z, \xi), \\
 M_\zeta &= M_x \cos(x, \zeta) + M_y \cos(y, \zeta) + M_z \cos(z, \zeta).
 \end{aligned}$$

Cosinusy kierunkowe, określone z dokładnością do małych pierwszego rzędu, mają przy tym następujące wartości:

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad \cos(x, \xi) &= 1, \quad \cos(x, \eta) = -u', \quad \cos(x, \zeta) = -w', \\
 \cos(y, \xi) &= u', \quad \cos(y, \eta) = 1, \quad \cos(y, \zeta) = -\varphi, \\
 \cos(z, \xi) &= w', \quad \cos(z, \eta) = \varphi, \quad \cos(z, \zeta) = 1.
 \end{aligned}$$

Równania równowagi obojętnej belki w stanie zwirzonym, przy uwzględnieniu założenia o zerowej sztywności deplanacji, z dokładnością do małych pierwszego rzędu mają postać

(2.4)  $EJ_{\eta} w''(x) = M_{\eta}$ ,  $EJ_{\xi} u''(x) = -M_{\xi}$ ,  $GJ_k \varphi'(x) = -M_{\xi}$ ,  
 przy czym  $EJ_{\eta}$  jest sztywnością zginania belki względem osi  $\eta$ ,  
 $EJ_{\xi}$  - sztywnością zginania belki względem osi  $\xi$ ,  $GJ_k$  - sztyw-  
 nością skręcania belki względem osi  $\xi$ .

Podstawiając równania (2.2), po uprzednim uwzględnieniu za-  
 leżności (2.1) i (2.3), do równań (2.4) i pomijając małe wyższe-  
 go rzędu, otrzymujemy następujący układ równań równowagi obojęt-  
 nej belki:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} EJ_{\eta}(x)w''(x) &= -\frac{P}{2}(x-c) - M_1 \varphi(x), \\ EJ_{\xi}(x)u''(x) &= M_1 - \frac{P}{2}(x-c) \varphi(x), \\ GJ_k(x)\varphi'(x) &= \frac{P}{2}[u(b) - u(x)] + \frac{P}{2}(x-c)u'(x) + M_1 w'(x). \end{aligned}$$

Z uwagi na założenie o dużo większej sztywności zginania  $EJ_{\eta}$   
 od sztywności  $EJ_{\xi}$  możemy w rozpatrywanym zagadnieniu pominąć  
 wpływ przemieszczenia  $w$  i w konsekwencji nie uwzględnić skład-  
 nika  $M_1 w'$  w trzecim równaniu (2.5).

Po zróżniczkowaniu drugiego i trzeciego równania (2.5) otrzy-  
 mamy

$$(2.6) \quad \begin{aligned} EJ_{\xi}(x)u'''(x) + EJ'_{\xi}(x)u''(x) + \frac{P}{2}(x-c)\varphi'(x) + \frac{P}{2}\varphi(x) &= 0, \\ GJ_k(x)\varphi''(x) + GJ'_k(x)\varphi'(x) - \frac{P}{2}(x-c)u''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Ograniczając się w dalszym ciągu pracy do belek o przekroju  
 prostokątnym, przy założeniu stałej grubości  $g$  przekroju i linio-  
 wo zmiennej jego wysokości  $h$ , otrzymujemy dla  $c \leq x \leq b$  nastę-  
 pujące zależności:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} h(x) &= h(b) \frac{x}{b}, \\ J_{\xi}(x) &= \frac{h(x)g^3}{12} = J_{\xi}(b) \frac{x}{b}, \\ J_k(x) &= \frac{h(x)g^3}{3} [1 - 0,63 \frac{g}{h(x)}]. \end{aligned}$$

Ponieważ przekrój prostokątny będzie wysoki a cienki, gdyż z  
 założenia  $EJ_{\eta} \gg EJ_{\xi}$ , zatem moment bezwładności przekroju na skrę-  
 canie możemy wyrazić za pomocą wzoru:

$$(2.8) \quad J_k(x) = \frac{h(x)g^3}{3} = J_k(b) \frac{x}{b}.$$

Po uwzględnieniu (2.7) i (2.8), równania (2.6) przyjmą postać

$$(2.9) \quad \begin{aligned} EJ_{\xi}(b) \frac{x}{b} u''' + EJ_{\xi}(b) \frac{1}{b} u'' + \frac{p}{2}(x-c) \varphi' + \frac{p}{2} \varphi &= 0, \\ GJ_k(b) \frac{x}{b} \varphi'' + GJ_k(b) \frac{1}{b} \varphi' - \frac{p}{2}(x-c) u'' &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając nową zmienną bezwymiarową

$$(2.10) \quad t = \frac{x}{b}$$

oraz oznaczenia

$$(2.11) \quad \beta = \frac{pl^2}{\sqrt{EJ_{\xi}(b)GJ_k(b)}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{GJ_k(b)}{EJ_{\xi}(b)}}, \quad \varepsilon = \frac{c}{b}, \quad \zeta = \frac{b}{l} = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

i zastępując funkcje  $u(x)$  i  $\varphi(x)$  odpowiednio funkcjami  $v(t)$  i  $\psi(t)$ , równaniom (2.9) nadamy ostatecznie postać

$$(2.12) \quad \begin{aligned} v''' + \frac{1}{t} v'' + \frac{1}{2} \beta \omega \zeta^3 \frac{t-\varepsilon}{t} \psi' + \frac{1}{2} \beta \omega \zeta^3 \frac{1}{t} \psi &= 0, \\ \psi'' + \frac{1}{t} \psi' - \frac{1}{2} \beta \frac{1}{\omega t} \zeta \frac{t-\varepsilon}{t} v'' &= 0. \end{aligned}$$

### 3. F u n k c j e $v(t)$ i $\psi(t)$

Równania różniczkowe równowagi obojętnej (2.12) są słuszne dla  $t$  zawartego w przedziale  $\langle \varepsilon, 1 \rangle$ . Ponieważ funkcje  $v(t)$  i  $\psi(t)$  oraz ich pochodne są ciągłe w tym przedziale, możemy napisać

$$(3.1) \quad \begin{aligned} v(t) &= v(\varepsilon) + (t-\varepsilon) v'(\varepsilon) + \frac{1}{2} (t-\varepsilon)^2 v''(\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^t (t-s)^2 v'''(s) ds, \\ \psi(t) &= \psi(\varepsilon) + (t-\varepsilon) \psi'(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^t (t-s) \psi''(s) ds. \end{aligned}$$

Uwzględniając warunki brzegowe wynikające z założenia dotyczącego podpór, tj. warunki

$$(3.2) \quad v(\varepsilon) = 0, \quad v'(\varepsilon) = 0, \quad \psi(\varepsilon) = 0,$$

oraz podstawiając do równań (3.1)  $v'''$  i  $\psi''$  określone z równań (2.12), otrzymamy

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2} (t-\varepsilon)^2 v''(\varepsilon) - \frac{1}{2} \omega \zeta^3 \int_{\varepsilon}^t \frac{(t-s)^2}{s} \left[ \frac{1}{\omega \zeta^3} v'''(s) + \frac{1}{2} \beta (s-\varepsilon) \psi'(s) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \beta \psi(s) \right] ds, \end{aligned}$$

$$\psi(t) = (t-\epsilon) \psi'(\epsilon) - \frac{\beta}{\omega l} \int_{\epsilon}^t \frac{t-s}{s} \left[ \frac{\omega l}{s} \psi'(s) - \frac{1}{2} \beta (s-\epsilon) \psi''(s) \right] ds.$$

Dokonując całkowania przez części, uzyskujemy układ równań całkowych Volterry drugiego rodzaju

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{2} (t-\epsilon)^2 \psi''(\epsilon) - \int_{\epsilon}^t \frac{t^2}{s^3} \psi(s) ds + \frac{1}{4} \beta \omega l s^3 \int_{\epsilon}^t (s^3 - \epsilon s^2 - s t^2 + \epsilon t^2) \frac{1}{s^2} \psi(s) ds, \\ \psi'(t) &= (t-\epsilon) \psi'(\epsilon) + \frac{1}{2} \beta \frac{\beta}{\omega l} \psi(t) - \beta \frac{\beta}{\omega l} \epsilon \int_{\epsilon}^t \frac{t}{s^3} \psi(s) ds - \int_{\epsilon}^t \frac{t}{s^2} \psi(s) ds. \end{aligned}$$

W celu otrzymania rozwiązania przybliżonego powyższego układu równań zastosowano metodę kolejnych przybliżeń. Przy tym jako pierwsze przybliżenia funkcji  $\psi(t)$  i  $\psi'(t)$  przyjęto

$$\psi_0(t) = \frac{1}{2} (t-\epsilon)^2 \psi''(\epsilon), \quad \psi'_0(t) = (t-\epsilon) \psi'(\epsilon).$$

Po wykonaniu trzech kroków iteracyjnych uzyskano rozwiązanie:

$$(3.4a) \quad \begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{2} \psi''(\epsilon) \left\{ \frac{49}{8} t^2 - 8\epsilon t + \frac{15}{8} \epsilon^2 - \frac{17}{4} t^2 \ln \frac{t}{\epsilon} + \frac{5}{4} t^2 \ln^2 \frac{t}{\epsilon} - \frac{1}{6} t^2 \ln^3 \frac{t}{\epsilon} + \right. \\ &\quad + \beta^2 s^4 \left[ -\frac{7}{128} t^4 - \frac{119}{218} \epsilon t^3 - \frac{15}{32} \epsilon^2 t^2 + \frac{9}{8} \epsilon^3 t - \frac{175}{3456} \epsilon^4 + \right. \\ &\quad + \left( \frac{1}{32} t^2 + \frac{19}{96} \epsilon t + \frac{9}{8} \epsilon^2 \right) t^2 \ln \frac{t}{\epsilon} + \left( -\frac{1}{6} t - \frac{1}{2} \epsilon \right) \epsilon t^2 \ln^2 \frac{t}{\epsilon} + \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{8} \epsilon^2 t^2 \ln^3 \frac{t}{\epsilon} \right] \right\} + \psi'(\epsilon) \left\{ \beta \omega l s^3 \left[ -\frac{17}{27} t^3 - \frac{17}{8} \epsilon t^2 + 3\epsilon^2 t - \frac{55}{216} \epsilon^3 + \right. \right. \\ &\quad + \left( \frac{7}{18} t + \frac{11}{4} \epsilon \right) t^2 \ln \frac{t}{\epsilon} - \left( \frac{1}{12} t + \epsilon \right) t^2 \ln^2 \frac{t}{\epsilon} + \frac{1}{6} \epsilon t^2 \ln^3 \frac{t}{\epsilon} \left. \right] + \\ &\quad + \beta^3 \omega l s^7 \left[ \frac{1}{360} t^5 - \frac{1}{768} \epsilon t^4 + \frac{55}{432} \epsilon^2 t^3 - \frac{1}{36} \epsilon^3 t^2 - \frac{5}{48} \epsilon^4 t + \frac{109}{34560} \epsilon^5 - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{64} t^2 + \frac{5}{72} \epsilon t + \frac{7}{48} \epsilon^2 \right) \epsilon t^2 \ln \frac{t}{\epsilon} + \left( \frac{1}{24} t + \frac{1}{32} \epsilon \right) \epsilon^2 t^2 \ln^2 \frac{t}{\epsilon} - \frac{1}{48} \epsilon^3 t^2 \ln^3 \frac{t}{\epsilon} \right] \left. \right\}, \\ \psi'(t) &= \frac{1}{2} \psi''(\epsilon) \left\{ \beta \frac{1}{\omega l} s \left[ \frac{7}{8} t^2 + 3\epsilon t - \frac{31}{8} \epsilon^2 - \left( \frac{3}{4} t + 4\epsilon \right) t \ln \frac{t}{\epsilon} + \right. \right. \\ &\quad + \left( \frac{1}{4} t + 2\epsilon \right) t \ln^2 \frac{t}{\epsilon} - \frac{1}{2} \epsilon t \ln^3 \frac{t}{\epsilon} \left. \right] + \\ &\quad + \beta^3 \frac{1}{\omega l} s^5 \left[ -\frac{1}{64} t^4 - \frac{11}{288} \epsilon t^3 + \frac{11}{32} \epsilon^2 t^2 - \frac{13}{32} \epsilon^2 t^2 + \frac{67}{376} \epsilon^4 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.4 \text{ b}) \quad & + \left( \frac{1}{12} t^2 - \frac{1}{8} \epsilon t - \frac{1}{16} \epsilon^2 \right) \epsilon t \ln \frac{t}{\epsilon} - \left( \frac{1}{16} t + \frac{1}{16} \epsilon \right) \epsilon^2 t \ln^2 \frac{t}{\epsilon} + \\
 & + \frac{1}{24} \epsilon^3 t \ln^3 \frac{t}{\epsilon} \Big] + \Psi'(\epsilon) \left\{ 4t - 4\epsilon - 5t \ln \frac{t}{\epsilon} + t \ln^2 \frac{t}{\epsilon} - \right. \\
 & - \frac{1}{6} t \ln^3 \frac{t}{\epsilon} + \beta^2 \varphi^4 \left[ -\frac{11}{72} t^3 + \frac{13}{32} \epsilon t^2 - \frac{9}{8} \epsilon^2 t + \frac{251}{288} \epsilon^3 + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{1}{12} t^3 + \frac{3}{16} \epsilon t + \frac{1}{2} \epsilon^2 \right) t \ln \frac{t}{\epsilon} - \left( \frac{3}{16} t + \frac{1}{2} \epsilon \right) \epsilon t \ln^2 \frac{t}{\epsilon} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{5}{24} \epsilon^2 t \ln^3 \frac{t}{\epsilon} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

#### 4. Krytyczne wartości siły P

Mając określone funkcje  $v(t)$  i  $\Psi(t)$ , możemy wyznaczyć krytyczne wartości siły P, korzystając z warunków symetrii odkształcenia belki. Dla  $x=b$ , tzn. dla  $t=1$  mamy mianowicie

$$(4.1) \quad v'(1) = 0, \quad \Psi'(1) = 0.$$

Po zróźniczkowaniu funkcji (3.4) i wykorzystaniu warunków (4.1) otrzymujemy układ dwóch równań jednorodnych względem  $v''(\epsilon)$  i  $\Psi'(\epsilon)$

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & A_{1,1} v''(\epsilon) + A_{1,2} \Psi'(\epsilon) = 0, \\
 & A_{2,1} v''(\epsilon) + A_{2,2} \Psi'(\epsilon) = 0,
 \end{aligned}$$

przy czym  $A_{i,k} = A_{i,k}(\beta, \omega, \epsilon, l)$ .

Aby zachodziła utrata stateczności, wielkości  $v''(\epsilon)$  i  $\Psi'(\epsilon)$  muszą być różne od zera. Zatem wyznacznik charakterystyczny układu równań (4.2) musi być równy zeru

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwiązując powyższy wyznacznik, otrzymamy niezależne od  $\omega$  i  $l$  równanie wiążące współczynniki  $\beta$  i  $\epsilon$

$$(4.3) \quad \beta^6 f_1(\epsilon) + \beta^4 f_2(\epsilon) + \beta^2 f_3(\epsilon) + f_4(\epsilon) = 0.$$

Obliczając, dla danej wartości parametru  $\epsilon$ , najmniejszy dodatni pierwiastek  $\beta$ , równania (4.3), możemy wyznaczyć krytyczną wartość  $P_{kr}$  siły  $P$  odpowiadającą danemu  $\epsilon$ . Na podstawie pierwszej zależności (2.11) mamy bowiem

$$(4.4) \quad P_{kr} = \beta_1 \frac{\sqrt{EJ_y(b)GJ_k(b)}}{l^2}.$$

Obliczenia wartości współczynnika  $\beta_1$  przeprowadzono dla  $\epsilon = 0,7 \div 0,95$ . Ponieważ

$$\epsilon = \frac{c}{b} = \frac{h(c)}{h(b)},$$

a zbieżność  $\Delta$  ramienia belki

$$\Delta = \frac{h(b) - h(c)}{l},$$

więc zależność między zbieżnością  $\Delta$  a parametrem  $\epsilon$  będzie następująca:

$$\Delta = \frac{h(b)}{l} (1 - \epsilon).$$

Przyjęcie  $\epsilon = 0,7 \div 0,95$  odpowiada najczęściej stosowanym zbieżnościom w belkach rozpatrywanego typu. Np. dla  $h(b)/l = 0,1$  otrzymamy

$$\Delta = 0,005 \div 0,03.$$

Zestawienie obliczonych wartości współczynnika stateczności  $\beta_1$  podano w poniższej tabeli.

$\epsilon$	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95
$\beta_1$	5,80	5,86	5,94	6,02	6,12	6,22

Należy zauważyć, że równania różniczkowe równowagi obojętnej (2.12) tracą swą ważność dla parametru  $\epsilon = 1$ . Taka wartość  $\epsilon$  odpowiadałaby belce o stałym przekroju. W pracy [2] rozpatrywano stateczność płaskiej postaci zginania belki o stałym przekroju przy tych samych założeniach co do podpór, sztywności deplanacji i kształtu przekroju poprzecznego. Celem wyznaczenia krytycznych



wartości obciążenia posłużono się tą samą metodą matematyczną, przy czym równania równowagi obojętnej rozwiązano również z dokładnością do trzech iteracji. Korzystając z wyników tej pracy, otrzymamy

$$\beta = 6,32 \quad \text{dla} \quad \varepsilon = 1.$$

Wyznaczone wartości współczynnika stateczności  $\beta$ , są obarczone pewnym błędem wskutek zastosowania skończonej, stosunkowo małej, liczby iteracji. Z analizy przeprowadzonej w pracy [2] wynika, że ze względu na szybkozbieżność procesu iteracji błąd ten jest niewielki i przy ograniczeniu się do trzech iteracji nie przekracza 5%. Przy tym wartości współczynników stateczności uzyskane w omawianej pozycji są mniejsze od wartości ścisłych. Można przyjąć, że również w niniejszym artykule wartości współczynnika  $\beta$ , są mniejsze od wartości ścisłych nie więcej niż o 5%.

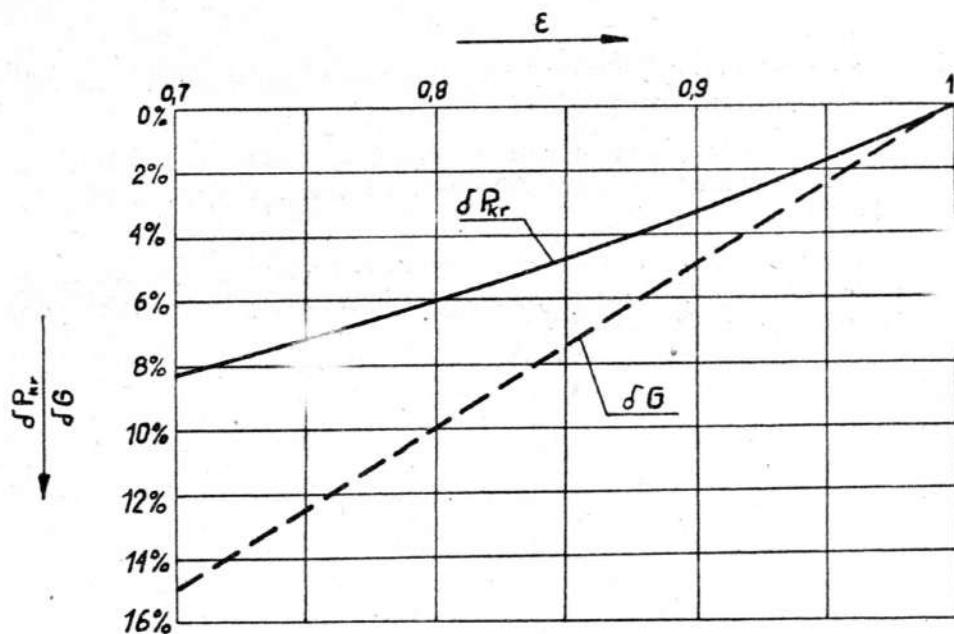
Jak widać z zestawienia wyników, im mniejsza jest wartość parametru  $\varepsilon$ , czyli im większa jest zbieżność ramienia belki, tym mniejsza jest wartość współczynnika stateczności  $\beta$ .

Dla rodziny rozpatrywanych belek o tych samych wymiarach  $h(b)$ ,  $g$  i  $l$  wartość siły krytycznej przy obniżaniu wartości  $\varepsilon$  będzie malała proporcjonalnie do  $\beta$ , (patrz wzór 4.4).

Jednocześnie przy zmniejszaniu  $\varepsilon$  ulega zmniejszeniu ciężar belki. Stosowanie belek o ramionach zbieżnych będzie celowe, jeżeli procentowy spadek wartości siły krytycznej względem siły krytycznej belki o stałym przekroju będzie mniejszy od procentowego spadku ciężaru belki. Na rys. 3 przedstawiono wykresy względnego spadku  $\delta P_{kr}$  siły krytycznej i względnego spadku  $\delta G$  ciężaru belki w funkcji parametru  $\varepsilon$ , przy czym

$$\delta P_{kr} = \frac{P'_{kr} - P_{kr}}{P'_{kr}}, \quad \delta G = \frac{G' - G}{G'}$$

( $P'_{kr}$  - wartość siły krytycznej dla belki o stałym przekroju,  
 $G'$  - ciężar belki o stałym przekroju).



Rys. 3.

Widzimy, że dla rozpatrywanych wartości  $\epsilon$ ,  $\delta P_{cr} < \delta G$ .  
Z punktu widzenia stateczności sprężystej stosowanie w omawianych belkach ramion zbieżnych jest więc uzasadnione.

B i b l i o g r a f i a

- [1] Timoshenko S.P., Gere J.M., Teoria stateczności sprężystej, Arkady, Warszawa (1963).
- [2] Wilczyński A., Stateczność płaskiej postaci zginania belki o osi załamanej, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 1, 14 (1976).
- [3] Wiśniewski S., Stateczność płaskiej postaci zginania belki o zmiennym przekroju, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Mechanika z. 7 (1960).