

Arnold Wilczyński

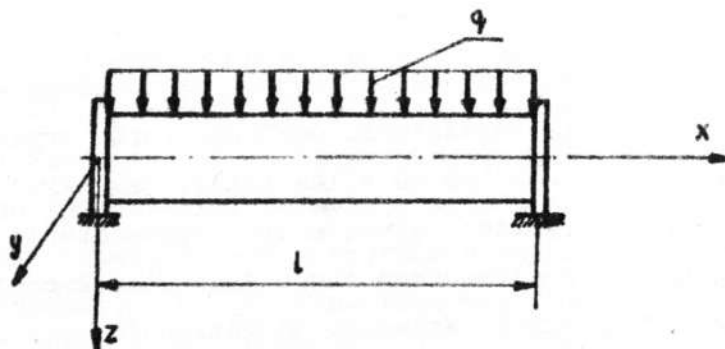
STATECZNOŚĆ PŁASKIEJ POSTACI ZGINANIA
BELKI OBCIĄŻONEJ RÓWNOMIERNIE

1. W s t ę p

W pracy rozpatrzono zagadnienie stateczności płaskiej postaci zginania belki dwupodporowej o stałym przekroju, poddanej działaniu równomiernie rozłożonego obciążenia pionowego q /rys. 1/. Ograniczono się przy tym do przypadku, w którym sztywność belki na skręcanie nieswobodne jest pomijalnie mała.

Przyjęto, że podpory uniemożliwiają obrót końców belki względem jej osi oraz względem osi y .

W odniesieniu do przekroju poprzecznego belki założono, że osie y i z prostokątnego układu x, y, z są głównymi centralnymi osiami bezwładności oraz że sztywność zginania względem osi y jest duża w porównaniu ze sztywnością względem osi z .



Rys. 1.

Przy powyższych założeniach wyprowadzono równania różniczkowe równowagi obojętnej belki, które następnie sprowadzono do układu dwóch równań całkowych Volterry drugiego rodzaju. Rozwiązania te-

go układu wyznaczono metodą kolejnych przybliżeń, po czym, wykorzystując symetrię odkształcenia zwichrzonej belki, otrzymano warunek pozwalający określić pierwsze krytyczne wartości obciążenia.

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla dwóch przypadków miejsca przyłożenia obciążenia: do osi belki i do jej górnej krawędzi.

W zakończeniu pracy podano przykład liczbowy.

2. R ó w n a n i a r ó w n o w a g i o b o j ę t n e j

Układ sił działających po utracie stateczności na oswobodzoną z więzów belkę przedstawiono na rys. 2., przy czym oznaczono przez:

M_y - moment oddziaływania utwierdzenia w płaszczyźnie $x y$,

M_z - moment oddziaływania utwierdzenia w płaszczyźnie $y z$,

a - odległość od środka ciężkości przekroju do znajdującego się nad nim punktu przyłożenia obciążenia ciągłego, przy czym

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2} h$$

Dla $0 \leq x \leq l$ położenie dowolnego przekroju poprzecznego belki po utracie stateczności będzie określone następującymi składowymi:

- przemieszczeniem u środka ciężkości przekroju w kierunku osi y ,
- przemieszczeniem w środka ciężkości przekroju w kierunku osi z ,
- kątem obrotu φ przekroju w płaszczyźnie $y z$.

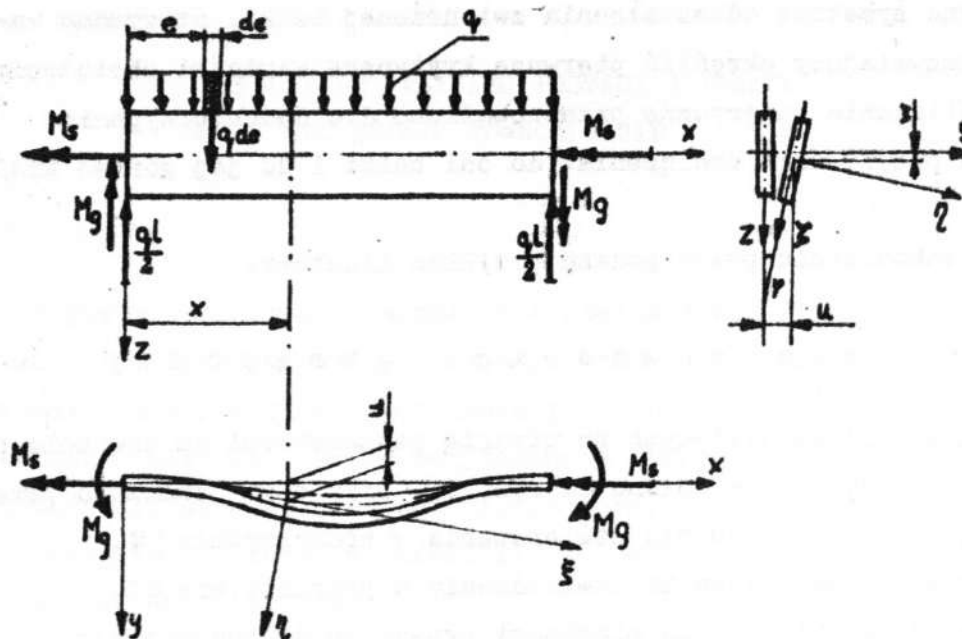
Składowe momentów sił zewnętrznych działających na belkę w dowolnym miejscu x wyrażają się wzorami:

$$M_x = -M_y + \frac{1}{2} q l u(x) - \int_0^x q [u(x) - u(e) - a \varphi(e)] de ,$$

(2.1)

$$M_y = -\frac{1}{2} q l x + \int_0^x q (x - e) de ,$$

$$M_z = -M_y .$$



Rys. 2.

Względem osi układu lokalnego ξ, η, ζ , związanego ze zwichrzonym przekrojem w miejscu X , składowe momentów wynoszą:

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad M_{\xi} &= M_x \cos(x, \xi) + M_y \cos(y, \xi) + M_z \cos(z, \xi) \\
 M_{\eta} &= M_x \cos(x, \eta) + M_y \cos(y, \eta) + M_z \cos(z, \eta) \\
 M_{\zeta} &= M_x \cos(x, \zeta) + M_y \cos(y, \zeta) + M_z \cos(z, \zeta)
 \end{aligned}$$

Występujące w powyższych równaniach cosinusy kierunkowe z dokładnością do małych pierwszego rzędu mają wartości podane w tablicy 1.

Tablica 1.

	x	y	z
ξ	1	u'	w'
η	$-u'$	1	φ
ζ	$-w'$	$-\varphi$	1

Równania równowagi belki w stanie zwichrzonym, po uwzględnieniu przyjętego we wstępie założenia o pomijalności sztywności deplanacji, z dokładnością do małych pierwszego rzędu są następujące:

$$(2.3) \quad EJ_{\eta} \frac{d^2 w}{dx^2} = M_{\eta} \quad , \quad EJ_{\xi} \frac{d^2 u}{dx^2} = -M_{\xi} \quad , \quad GJ_k \frac{d\varphi}{dx} = -M_{\xi} \quad ;$$

gdzie:

EJ_{η} - sztywność zginania belki względem osi η ,

EJ_{ξ} - sztywność zginania belki względem osi ξ ,

GJ_k - sztywność skręcania belki względem osi ξ .

Po podstawieniu zależności (2.1) i (2.2) do równań (2.3) i pominięciu małych wyższego rzędu, równania równowagi obojętnej przyjmują postać:

$$EJ_{\eta} w'' = M_s u' - M_q \varphi - \frac{1}{2} q x (l-x) - q u' \int_0^x [u(e) + a \varphi(e)] de ,$$

$$(2.4) \quad EJ_{\xi} u'' = M_q - \frac{1}{2} q x (l-x) \varphi ,$$

$$GJ_k \varphi' = M_s - q \left(\frac{1}{2} l - x \right) u + \frac{1}{2} q x (l-x) u' - q \int_0^x [u(e) + a \varphi(e)] de$$

Poza tym dodatkowo pominięto w powyższych równaniach wyrażenia zawierające funkcję w' z uwagi na założenie $EJ_{\eta} \gg EJ_{\xi}$, które powoduje, iż wpływ przemieszczenia w jest w tym zagadnieniu pomijalnie mały.

Otrzymane równania są różniczkowo-całkowe, niedogodne do badań. Dlatego zróżniczkowano drugie i trzecie z nich, otrzymując układ równań różniczkowych liniowych o zmiennych współczynnikach

$$(2.5) \quad EJ_{\xi} u''' + \frac{1}{2} q x (l-x) \varphi' + q \left(\frac{1}{2} l - x \right) \varphi = 0 \quad ,$$

$$GJ_k \varphi'' + q a \varphi - \frac{1}{2} q x (l-x) u'' = 0$$

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\gamma = \frac{q l^3}{\sqrt{E J_z G J_k}} \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{G J_k}{E J_z}} \quad , \quad \lambda = \frac{a}{l} \quad ,$$

równania (2.5) przyjmą ostatecznie postać:

$$(2.6) \quad u''' + \frac{1}{2} \gamma \omega l^{-3} x(l-x) \varphi' + \gamma \omega l^{-3} \left(\frac{1}{2} l - x\right) \varphi = 0 \quad ,$$

$$\varphi'' + \gamma \omega^{-1} l^{-2} \lambda \varphi - \frac{1}{2} \gamma \omega^{-1} l^{-3} x(l-x) u'' = 0 \quad .$$

3. F u n k c j e $u(x)$ i $\varphi(x)$

Wykorzystując własność funkcji $u(x)$ i $\varphi(x)$, polegającą na ciągłości tych funkcji oraz ich pochodnych w przedziale $\langle 0, l \rangle$, możemy napisać

$$(3.1) \quad u(x) = u(0) + x u'(0) + \frac{1}{2} x^2 u''(0) + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u'''(t) dt \quad ,$$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \varphi'(0) + \int_0^x (x-t) \varphi''(t) dt \quad .$$

Po uwzględnieniu, wynikających z założenia dotyczącego podpór, warunków brzegowych

$$(3.2) \quad u(0) = 0 \quad , \quad u'(0) = 0 \quad , \quad \varphi(0) = 0 \quad ,$$

oraz równań (2.6) otrzymamy:

$$u(x) = \frac{1}{2} x^2 u''(0) - \frac{1}{2} \gamma \omega l^{-3} \int_0^x (x-t)^2 \left[\frac{1}{2} t(l-t) \varphi'(t) + \left(\frac{1}{2} l - t\right) \varphi(t) \right] dt \quad ,$$

$$\varphi(x) = x \varphi'(0) - \gamma \omega^{-1} l^{-2} \int_0^x (x-t) \left[\lambda \varphi(t) - \frac{1}{2} l^{-1} t(l-t) u''(t) \right] dt \quad .$$

Dokonując całkowania przez części mamy:

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \frac{1}{2} x^2 u''(0) - \frac{1}{2} \gamma \omega l^{-3} \int_0^x [t^3 - t^2(x+l) + t(x)] \varphi(t) dt, \\
 (3.3) \quad \varphi(x) &= x \varphi'(0) + \frac{1}{2} \gamma \omega^{-1} l^{-3} x(l-x) u(x) + \gamma \omega^{-1} l^{-3} \int_0^x (3t-x-l) u(t) dt + \\
 &\quad + \lambda \gamma \omega^{-1} l^{-2} \int_0^x (t-x) \varphi(t) dt.
 \end{aligned}$$

Powyższe równania stanowią układ równań całkowych Volterry drugiego rodzaju. W celu otrzymania rozwiązania przybliżonego zastosowano metodę kolejnych przybliżeń. Posłużono się przy tym przepisem iteracyjnym

$$\begin{aligned}
 u_{n+1}(x) &= u_0(x) - \frac{1}{2} \gamma \omega l^{-3} \int_0^x K_1(t, x, l) \varphi_n(t) dt, \\
 \varphi_{n+1}(x) &= \varphi_0(x) + \frac{1}{2} \gamma \omega^{-1} l^{-3} x(l-x) u_n(x) + \gamma \omega^{-1} l^{-3} \int_0^x K_2(t, x, l) u_n(t) dt + \\
 &\quad + \lambda \gamma \omega^{-1} l^{-2} \int_0^x K_3(t, x) \varphi_n(t) dt, \\
 n &= 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

przyjmując

$$u_0(x) = \frac{1}{2} x^2 u''(0), \quad \varphi_0(x) = x \varphi'(0)$$

Uzyskane rozwiązanie, wyznaczone z dokładnością do czterech iteracji, ma postać

$$(3.4a) \quad u(x) = u''(0) \left[\frac{x^2}{2} + \gamma^2 \left(-\frac{x^6 l^{-6}}{2688} + \frac{x^7 l^{-5}}{672} - \frac{x^6 l^{-4}}{720} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda \gamma^3 \omega^{-1} \left(\frac{x^{10} l^{-8}}{129600} - \frac{x^9 l^{-7}}{25920} + \frac{x^8 l^{-6}}{26880} \right) + \\
 & + \gamma^4 \left(\frac{x^{11} l^{-12}}{3144960} - \frac{x^{13} l^{-11}}{449280} + \frac{73 x^{12} l^{-10}}{12773376} - \frac{23 x^{11} l^{-9}}{3548160} + \right. \\
 & \left. + \frac{x^{10} l^{-8}}{362880} \right) + \lambda^2 \gamma^4 \omega^{-2} \left(- \frac{x^{12} l^{-10}}{10644480} - \frac{x^{11} l^{-9}}{1774080} - \frac{x^{10} l^{-8}}{1844400} \right) + \\
 & + \varphi'(0) \left[\gamma \omega \left(\frac{x^5 l^{-3}}{40} - \frac{x^4 l^{-2}}{24} \right) + \lambda \gamma^2 \left(- \frac{x^7 l^{-5}}{504} - \frac{x^6 l^{-4}}{360} \right) + \right. \\
 & + \gamma^3 \omega \left(- \frac{x^{11} l^{-9}}{36960} + \frac{19 x^{10} l^{-8}}{151200} - \frac{7 x^9 l^{-7}}{34560} + \frac{x^8 l^{-6}}{8960} \right) + \\
 & + \lambda^2 \gamma^3 \omega^{-1} \left(\frac{x^9 l^{-7}}{17280} - \frac{x^8 l^{-6}}{13440} \right) + \lambda \gamma^4 \left(\frac{x^{13} l^{-11}}{404352} - \right. \\
 & \left. - \frac{37 x^{12} l^{-10}}{3991680} + \frac{31 x^{11} l^{-9}}{2217600} - \frac{13 x^{10} l^{-8}}{1844400} \right) + \\
 & \left. + \lambda^3 \gamma^4 \omega^{-2} \left(- \frac{x^{11} l^{-9}}{1108800} + \frac{x^{10} l^{-8}}{907200} \right) \right] ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.4b) \quad \varphi(x) = u''(0) & \left[\gamma \omega^{-1} \left(- \frac{x^4 l^{-3}}{24} + \frac{x^3 l^{-2}}{12} \right) + \lambda \gamma^2 \omega^{-2} \left(\frac{x^6 l^{-5}}{720} - \frac{x^5 l^{-4}}{240} \right) + \right. \\
 & + \gamma^3 \omega^{-1} \left(\frac{x^{10} l^{-9}}{8640} - \frac{x^9 l^{-8}}{1728} + \frac{5 x^8 l^{-7}}{5376} - \frac{x^7 l^{-6}}{2016} \right) + \\
 & + \lambda^2 \gamma^3 \omega^{-3} \left(- \frac{x^8 l^{-7}}{40320} + \frac{x^7 l^{-6}}{10080} \right) + \\
 & \left. + \lambda \gamma^4 \omega^{-2} \left(- \frac{x^{12} l^{-11}}{285120} + \frac{x^{11} l^{-10}}{47520} - \frac{271 x^{10} l^{-9}}{7257600} + \frac{31 x^9 l^{-8}}{1451520} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda^3 \gamma^4 \omega^{-4} \left(\frac{x^{10} l^{-9}}{3628800} - \frac{x^9 l^{-8}}{725760} \right) + \\
 & + \varphi'(0) \left[x + \lambda \gamma \omega^{-1} \left(-\frac{x^3 l^{-2}}{6} \right) + \gamma^2 \left(-\frac{x^7 l^{-6}}{168} + \frac{x^6 l^{-5}}{60} - \frac{x^5 l^{-4}}{80} \right) + \right. \\
 & + \lambda^2 \gamma^2 \omega^{-2} \frac{x^5 l^{-4}}{120} + \lambda \gamma^3 \omega^{-1} \left(\frac{x^9 l^{-8}}{1512} - \frac{x^8 l^{-7}}{560} + \frac{13 x^7 l^{-6}}{10080} \right) + \\
 & + \lambda^3 \gamma^3 \omega^{-3} \left(-\frac{x^7 l^{-6}}{5040} \right) + \gamma^4 \left(\frac{x^{13} l^{-12}}{104832} - \frac{x^{12} l^{-11}}{18480} + \right. \\
 & + \frac{29 x^{11} l^{-10}}{246400} - \frac{x^{10} l^{-9}}{8640} + \frac{x^9 l^{-8}}{23040} \left. \right) + \lambda^2 \gamma^4 \omega^{-2} \left(-\frac{83 x^{11} l^{-10}}{3326400} + \right. \\
 & \left. + \frac{x^{10} l^{-9}}{15120} - \frac{17 x^9 l^{-8}}{362880} \right) + \lambda^4 \gamma^4 \omega^{-4} \frac{x^9 l^{-8}}{362880} \left. \right]
 \end{aligned}$$

4. Krytyczne wartości obciążenia belki

Z symetrii odkształcenia belki względem osi $x = \frac{1}{2}l$ wynikają następujące warunki:

$$(4.1) \quad u'(l/2) = 0, \quad \varphi'(l/2) = 0.$$

Wprowadzając do tych warunków funkcje (3.4) otrzymujemy układ dwóch równań jednorodnych względem $u''(0)$ i $\varphi'(0)$

$$(4.2) \quad A_{1,1} u''(0) + A_{1,2} \varphi'(0) = 0,$$

$$A_{2,1} u''(0) + A_{2,2} \varphi'(0) = 0,$$

gdzie

$$A_{i,k} = A_{i,k}(\gamma, \omega, \lambda, l).$$

Przy utracie stateczności wielkości $u''(0)$ i $\psi'(0)$ są różne od zera, zatem wyznacznik charakterystyczny układu równań (4.2) musi być równy zeru

$$(4.3) \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Wyznaczając dla danych wartości ω i λ , najmniejszy dodatni pierwiastek γ_1 równania (4.3) możemy określić krytyczną wartość obciążenia belki

$$(4.4) \quad (ql)_{kr} = \gamma_1 \frac{\sqrt{EJ_x GJ_k}}{l^2}$$

Wartość współczynnika γ_1 obliczono dla dwóch wartości współczynnika $\lambda = a/l$: $\lambda = 0$ i $\lambda = 0,025$. Wartość $\lambda = 0$ odpowiada przyłożeniu obciążenia ciągłego w osi belki. W tym przypadku γ_1 jest niezależne od wartości ω i wynosi

$$\gamma_1 \approx 47,3$$

Przypadek $\lambda = 0,025$ odpowiada przyłożeniu obciążenia do górnej krawędzi belki ($a=h/2$), której wymiary spełniają warunek $h = 0,05l$. Wartość γ_1 jest teraz zależna od wartości współczynnika

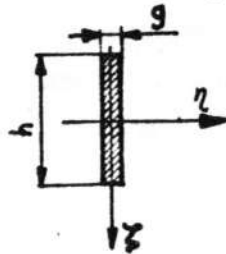
$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_k}{EJ_s}}$$

Przyjęto do obliczeń $\omega = 1,245$, która to wartość dotyczy belek stalowych o przekroju poprzecznym w kształcie wydłużonego prostokąta (rys. 3). Uwzględniając bowiem zależności

$$J_s = \frac{1}{12} h g^3, \quad J_k = \frac{1}{3} h g^3 \left(1 - 0,63 \frac{g}{h}\right) \approx \frac{1}{3} h g^3, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

i przyjmując dla stali $\nu = 0,29$, znajdujemy

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{1+\nu}} = 1,245$$



Rys. 3

Dla $\lambda = 0,025$ i $\omega = 1,245$ otrzymano

$$\gamma_i = 46,1$$

Widzimy, że wyniki uzyskane dla przypadków $\lambda = 0$ i $\lambda = 0,025$ niewiele różnią się od siebie. Przyłożenie obciążenia ciągłego do górnej krawędzi belki powoduje zmniejszenie krytycznej wartości obciążenia zaledwie o 2,5%.

Jeśli chodzi o dokładność uzyskanych wyników można przypuszczać, że wskutek skończonej liczby iteracji wartości współczynnika γ_i są one nieco mniejsze od wartości ścisłych.

5. P r z y k ł a d l i c z b o w y

Wyznaczyć krytyczną wartość obciążenia belki (rys. 1) o przekroju prostokątnym. Dane: $h = 10$ cm, $g = 0,5$ cm, $l = 200$ cm, $E = 2,1 \cdot 10^5$ MN/m², $\omega = 1,245$.

Krytyczna wartość obciążenia, przy założeniu, że jest ono

przyłożone do górnej krawędzi belki, określona jest wzorem

$$(ql)_{kr} = 46,1 \frac{\sqrt{EJ_s GJ_k}}{l^2}$$

Podstawiając $J_s = \frac{1}{12} h g^3$, $GJ_k / EJ_s = \omega^2$ otrzymamy

$$(ql)_{kr} = \frac{46,1}{12} \frac{h g^3}{l^2} \omega E = 3,14 \text{ kN}$$

Obliczmy dodatkowo maksymalne naprężenia zginające, które byłyby wywołane działaniem $(ql)_{kr}$. Ponieważ największy moment zginający jest równy $(ql)_{kr} l / 8$, a wskaźnik wytrzymałości przekroju wynosi $q h^2 / 6$, przeto

$$\sigma_{max} = \frac{3}{4} (ql)_{kr} \frac{l}{q h^2} = 94,2 \text{ MN/m}^2 .$$

Dla stali konstrukcyjnych dopuszczalne naprężenia zginające k_q są większe od $94,2 \text{ MN/m}^2$. Obliczenie więc nośności na podstawie k_q naraziłoby rozpatrywaną belkę na utratę stateczności.

L i t e r a t u r a

1. Timoshenko S.P., Gere J.M., Teoria stateczności sprężystej, Arkady, Warszawa 1963
2. Wilczyński A., Wiśniewski S., Nieliniowe zagadnienie stateczności płaskiej postaci zginania belki utwierdzonej nieprzesuwnie na obu końcach, Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, "Mechanika", zeszyt 8, 1967
3. Wiśniewski S., Stateczność płaskiej postaci zginania belki ciągłej, Archiwum Budowy Maszyn, tom IX, zeszyt 2, 1962