

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Studia Techniczne 1980 z.8

Walenty Dudziak
WSP Bydgoszcz

STAN NAPRĘŻENIA I PRZEMIESZCZENIA W NIEOGRANICZONYM
CIELE STAŁYM WYWOŁANY PROCESEM TERMODYFUZJI

W s t ę p

Zjawisko termodyfuzji występuje powszechnie w przyrodzie między innymi w ujednorodnieniu składu chemicznego powietrza, wyrównania stężenia w roztworach, a także w procesach nawęglania, azotowania, stabilizowania itp., zachodzących w ciałach stałych w obecności podwyższonej temperatury.

Zjawisko wzajemnego przenikania atomów w ciałach stałych, tj. zjawisko termodyfuzji zostało również wykorzystane z powodzeniem do nierozłącznego spajania metali - zgrzewania dyfuzyjnego.

Znany jest przypadek niezamierzonego i niekontrolowanego połączenia dyfuzyjnego anteny z jej tuleją prowadzącą w czasie lotu jednego z pojazdów kosmicznych. Dokładnie dopasowane i szczelnie przylegające części nagrzane energią słoneczną w obecności absolutnej próżni połączyły się tworząc mocne złącza dyfuzyjne. Z największym trudem udało się kosmonautom zniszczyć to połączenie, wbijając antenę na zewnątrz pojazdu.

Powszechność występowania zjawiska termodyfuzji wywołała duże zainteresowanie badaczy. Ukazała się bardzo bogata literatura omawiająca technologię wybranych procesów oraz własności i strukturę otrzymanej warstwy powierzchniowej lub złącza. Mało było jak do tej pory prac dotyczących teoretycznego opisu zjawiska termodyfuzji w ciałach stałych. Jeszcze do niedawna prace tego typu opierały się na opisie podanym w 1815 roku przez Ficka, który jednak nie uwzględniał wpływu

istotnych czynników np. gradientu temperatury oraz odkształceń na rozkład koncentracji. W latach sześćdziesiątych pojawiła się nowa koncepcja modelu matematycznego zjawiska termodyfuzji, której autorami byli J. S. Podstrigacz [5] oraz W. Nowacki [3]. Obejmuje ona wiele efektów dotychczas pomijanych, np. wzajemne sprzężenie temperatury i koncentracji w ośrodku, wpływ odkształceń na przebieg procesu. Zbliżenie modelu teoretycznego do zjawisk dostrzeganych w badaniach doświadczalnych skomplikowało bardzo stronę matematyczną problemu. Otrzymano układ sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych paraboliczno-hiperbolicznych [4], których rozwiązanie napotyka na spore trudności.

Niniejsza praca za punkt wyjścia przyjmuje równania podane przez Nowackiego pomijając człony dylatacyjne. Jest ona kontynuacją pracy autora [2], w której wyznaczono rozkład temperatury i koncentracji wywołany procesem termodyfuzji. Obecnie określimy stan naprężenia i przemieszczenia w nieograniczonym ciele stałym, a uzyskane wyniki zilustrujemy przykładem liczbowym.

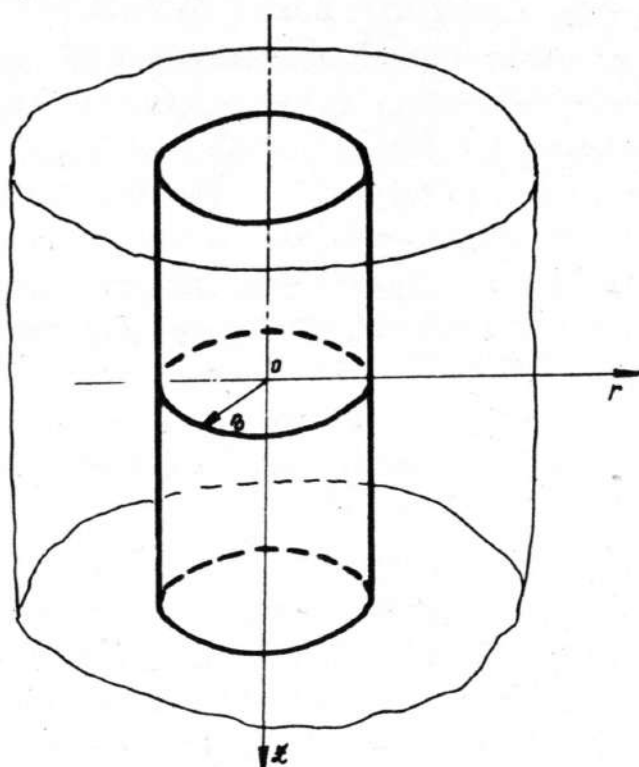
Rozpatrzmy wybrany proces obróbki cieplno-chemicznej, dla którego wyznaczymy wartości współczynników termodyfuzji i przeprowadzimy obliczenia numeryczne.

1. Założenia i równania wyjściowe

Zajmiemy się procesem termodyfuzji w sprężystym ciele stałym wywołanym przyłożeniem do poboczniczy nieskończonego walca o promieniu r_0 chwilowego źródła dyfuzji /rys. 1./ w postaci

$$G = G_0 \frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r_0} \delta(t);$$

gdzie G_0 oznacza wydatek źródła, $\delta(r)$, $\delta(t)$ są dystrybucyjnymi funkcjami Diraca względem miejsca i czasu. Przyjmujemy, że w chwili początkowej ciało znajduje się w stanie natural-



Rys.1.

nym, beznaprężeniowym, a stan fizyczny ciała w dowolnej chwili czasu t opisuje układ równań różniczkowych cząstkowych [3]. Założymy także ograniczoność naprężeń i przemieszczeń w dużej odległości od miejsca przyłożenia źródła /dla $r \rightarrow \infty$ / oraz w bardzo odległych czasach od chwili początkowej procesu /dla $t \rightarrow \infty$ /. Równania wyjściowe mają postać:

$$(\nabla^2 - \frac{1}{\kappa_1} \partial_t) \theta + \alpha_0 \partial_t c = -Q,$$

$$(\nabla^2 - \frac{1}{\kappa_2} \partial_t) c + \beta_0 \nabla^2 \theta = -G,$$

/1.1/

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \partial_i \varepsilon + \gamma_T \partial_i \theta + \gamma_C \partial_i c = 0,$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad i=1,2,3,$$

W równaniach /1.1/ Θ oznacza względne pole temperatury ciała odniesione do temperatury początkowej T_0 , c - względną koncentrację /stężenie/ czynnika dyfundującego odniesioną do koncentracji początkowej c_0 , Q i \bar{c} oznaczają odpowiednio intensywność źródła ciepła i dyfuzji, u_i są współrzędnymi wektora przemieszczenia, ε - dylatacją tensora odkształcenia, $\kappa_1, \kappa_2, \alpha_0, \beta_0, \gamma_T, \gamma_c$ - stałymi charakteryzującymi własności cieplne i dyfuzyjne ośrodka, λ i μ - stałe Lamé'ego.

Rozwiązanie dwóch pierwszych sprzężonych równań /1.1/ było przedmiotem pracy [2]. W niniejszej pracy wykorzystamy uzyskane tam wyniki i zajmiemy się rozwiązaniem układu równań przemieszczeniowych /1.1/3. Temperatura i koncentracja wyznaczone w pracy [2] mają postać

$$/1.2/ \quad \Theta(r,t) = - \frac{\alpha_0 \bar{c}_0}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\lambda_1^2} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1^2} \alpha^2\right) - \frac{1}{\lambda_2^2} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_2^2} \alpha^2\right) \right] \alpha J_0(\alpha r_0) J_0(\alpha r) d\alpha;$$

$$/1.3/ \quad c(r,t) = \frac{\bar{c}_0}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \int_0^\infty \left[\left(1 - \frac{1}{\kappa_1 \lambda_1^2}\right) \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1^2} \alpha^2\right) - \left(1 - \frac{1}{\kappa_2 \lambda_2^2}\right) \exp\left(-\frac{t}{\lambda_2^2} \alpha^2\right) \right] \alpha J_0(\alpha r_0) J_0(\alpha r) d\alpha$$

gdzie λ_1 i λ_2 muszą spełniać następujące zależności

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \alpha_0 \beta_0 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_2} + \alpha_0 \beta_0\right)^2 + \frac{4\alpha_0 \beta_0}{\kappa_2}} \right]$$

oraz $J_0(x)$ oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju zerowego rzędu, α parametr całkowitej transformacji Hankela.

Układ równań /1.1/3 rozwiążemy przy pomocy funkcji potencjału termodyfuzosprężystego przemieszczenia zdefiniowanego

$$/1.4/ \quad u_i = \partial_i \Phi$$

Funkcję potencjału wyznaczmy z kolei z rozwiązania równania Poissona, którego prawa strona jest liniową kombinacją temperatury i koncentracji [4]

$$/1.5/ \quad \nabla^2 \Phi = m_0 \psi,$$

gdzie

$$m_0 = \frac{\delta r}{\lambda + 2\mu}, \quad \nu = \theta + \frac{\delta c}{\delta r} c.$$

W celu obliczenia stanu naprężenia i przemieszczenia wykorzystamy znane związki geometryczne oraz związki Duhamela-Neumana uogólnione zagadnienia termodyfuzji [4]

$$/1.6/ \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j)$$

$$/1.7/ \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon - \delta r \nu) \delta_{ij}$$

gdzie δ_{ij} - symbol Kroneckera,
 ε_{ij} - tensor odkształceń sprężystych.

2. Wyznaczenie stanu naprężenia i przemieszczenia

Przyłożenie źródła dyfuzji do ciała stałego w sposób osiowosymetryczny względem osi /rys. 1./ pociąga za sobą osiowosymetryczny stan naprężenia i przemieszczenia oraz temperatury i koncentracji. Ponadto własności ośrodka będą niezależne od osi z, lecz będą wyłącznie funkcjami współrzędnej r i czasu t.

Współrzędne stanu naprężenia i przemieszczenia wyznaczmy przy pomocy wzorów [4]

$$\sigma_{rr} = -2\mu \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

$$/2.1/ \quad \sigma_{\theta\theta} = -2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2},$$

$$\sigma_{zz} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \Phi,$$

$$/2.2/ \quad u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

Równanie Poissona /1.5/ przy uwzględnieniu /1.2/ i /1.3/ przyjmie postać

$$/2.3/ \quad \nabla^2 \Phi = \frac{m_0 G_0}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \int_0^\infty \left[\frac{A_1}{\lambda_1^2} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1^2} \alpha^2\right) - \frac{A_2}{\lambda_2^2} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_2^2} \alpha^2\right) \right] \alpha J_0(\alpha r_0) J_0(\alpha r) d\alpha ,$$

gdzie $A_i = \frac{\alpha_c}{\alpha_r} \left(\lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_i^2} \right) - \alpha_0$, $i = 1, 2$. $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$.

Rozwiązanie równania /2.3/ ma postać

$$/2.4/ \quad \Phi(r, t) = - B \int_0^\infty D(\alpha, t) \frac{1}{\alpha} J_0(\alpha r_0) J_0(\alpha r) d\alpha ,$$

przy czym przyjęto następujące oznaczenia skracające

$$D(\alpha, t) = \frac{A_1}{\lambda_1^2} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1^2} \alpha^2\right) - \frac{A_2}{\lambda_2^2} \exp\left(-\frac{t}{\lambda_2^2} \alpha^2\right) , \quad B = \frac{m_0 G_0}{2\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} .$$

Wykonując różniczkowanie zgodnie z wzorami /2.1/ i /2.2/ otrzymamy

$$G_{rr}(r, t) = - 2\mu B \int_0^\infty D(\alpha, t) J_0(\alpha r_0) J_1(\alpha r) d\alpha ,$$

$$/2.5/ \quad G_{\varphi\varphi}(r, t) = - 2\mu B \int_0^\infty D(\alpha, t) \alpha J_0(\alpha r_0) \left[J_0(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} J_1(\alpha r) \right] d\alpha ,$$

$$G_{zz}(r, t) = - 2\mu B \int_0^\infty D(\alpha, t) \alpha J_0(\alpha r_0) J_0(\alpha r) d\alpha ,$$

$$/2.6/ \quad U_r(r, t) = B \int_0^{\infty} D(\alpha, t) J_0(\alpha r_0) J_1(\alpha r) d\alpha.$$

Ostateczną postać naprężeń i przemieszczeń panujących w nieograniczonym ciele stałym można otrzymać przez bezpośrednie obliczenie całek we wzorach /2.5/ i /2.6/. Uzyskane tą drogą rozwiązania są w postaci szeregów nieskończonych, przy czym sumowaniu podlegają między innymi funkcje hipergeometryczne. Mimo że końcowe wyniki uzyskuje się stosunkowo łatwo, jednak są one bardzo niewygodne do obliczeń numerycznych. Dlatego posłużymy się innym sposobem otrzymania ostatecznej postaci rozwiązań. Wykorzystamy przedstawienie całkowe funkcji

$$/2.7/ \quad \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\lambda_i^2} t\right) = -\frac{\alpha^2}{\lambda_i^2} \int_0^t \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\lambda_i^2} \tau\right) d\tau + 1,$$

oraz przedstawienie funkcji Bessela [6]

$$/2.8/ \quad J_1(\alpha r) = -\frac{1}{\alpha} \frac{d}{dr} J_0(\alpha r).$$

Podstawiając przedstawienia /2.7/ i /2.8/ do wzorów /2.5/ i /2.6/ oraz wykorzystując możliwość zmiany kolejności całkowania i różniczkowania [1] ostatecznie otrzymamy

$$\sigma_{rr} = \frac{B}{r} \left\{ A_1 \int_0^t D_1(r, \tau) d\tau - A_2 \int_0^t D_2(r, \tau) d\tau \right\} + \frac{D}{r} \int_0^{\infty} J_0(\alpha r_0) J_1(\alpha r) d\alpha,$$

$$/2.9/ \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{B}{t} \left\{ A_1 E_1(r, t) - A_2 E_2(r, t) \right\},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & \frac{B}{t} \left\{ A_1 E(r, t) - A_2 E(r, t) \right\} - \frac{B}{r} \left\{ A_1 \int_0^t D_1(r, \tau) d\tau - A_2 \int_0^t D_2(r, \tau) d\tau \right\} + \\ & - \frac{D}{r} \int_0^{\infty} J_0(\alpha r_0) J_1(\alpha r) d\alpha, \end{aligned}$$

$$/2.10/ \quad u_r = \frac{B}{2\mu} \left\{ A_1 \int_0^t D_1(r, \tau) d\tau - A_2 \int_0^t D_2(r, \tau) d\tau \right\} + \frac{D}{2\mu_0} \int_0^\infty I_0(\alpha r_0) J_1(\alpha r) d\alpha ,$$

gdzie

$$D_i(r, t) = \frac{1}{t^2} \exp\left(-\frac{\lambda_i^2(r_0^2 + r^2)}{4t}\right) \left[-r I_0\left(\frac{\lambda_i r_0 r}{2t}\right) + r_0 I_1\left(\frac{\lambda_i r_0 r}{2t}\right) \right], \quad i=1,2.,$$

$$E_i(r, t) = \exp\left(-\frac{\lambda_i^2(r_0^2 + r^2)}{4t}\right) I_0\left(\frac{\lambda_i r_0 r}{2t}\right) , \quad i = 1,2.,$$

$$D = \frac{m_0 \mu \tilde{G}_0}{\pi \lambda_1^2 \lambda_2^2} \left(\frac{\alpha_c}{\alpha_T} \frac{1}{\lambda_1} + \alpha_0 \right) .$$

* Jak łatwo można zauważyć otrzymane rozwiązania spełniają założone warunki brzegowe, a także równanie równowagi wewnętrznej. We wzorach /2.9/ i /2.10/ $I_0/x/$ oraz $I_1/x/$ oznaczają zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego rodzaju zerowego i pierwszego rzędu.

3. P r z y k ł a d l i c z b o w y

Otrzymane wzory na współrzędne stanu naprężenia i przemieszczenia zilustrujemy przykładem liczbowym. Przede wszystkim wykorzystamy wcześniej wyznaczone wartości współczynników termodyfuzji i stałych materiałowych dla wybranego procesu obróbki cieplno-chemicznej, a mianowicie azotowania. Założymy, że ciało stałe ma własności fizyczne i mechaniczne żelaza oraz, że zostało wstępnie ogrzane do temperatury $T_0 = 550^\circ \text{C}$, zaś koncentracja wstępna wynosi $c_0 = 7.5 \cdot 10^{-4}$.

cm^3/kg . Szczegółowe omówienie wyznaczenia współczynników znajduje się w pracy [2], tutaj ograniczymy się do podania niektórych wartości liczbowych:

$$\begin{aligned}c_{\epsilon c} &= 1,2165 \text{ [cal/cm}^3 \text{ deg]}, \\k &= 0,087 \text{ [cal/cm s deg]}, \\k_1 &= 0,07151 \text{ [cm}^2\text{/s]}, \\k_2 &= 7,392 \cdot 10^{-8} \text{ [cm}^2\text{/s]}, \\ \beta_0 &= 1,03229 \cdot 10^{-5} \text{ [deg}^{-1}\text{]}, \\ \alpha_0 &= 65,2724 \text{ [s deg/cm}^2\text{]}.\end{aligned}$$

Na podstawie obliczonych wartości współczynników termodyfuzji i rozwiązania /2.9/ oraz /2.10/ wykonano obliczenia numeryczne na maszynie cyfrowej Odra-1204. Opierając się na otrzymanych wynikach wykonano wykresy obrazujące zmiany naprężeń i przemieszczenia ciała stałego jako funkcje miejsca i czasu.

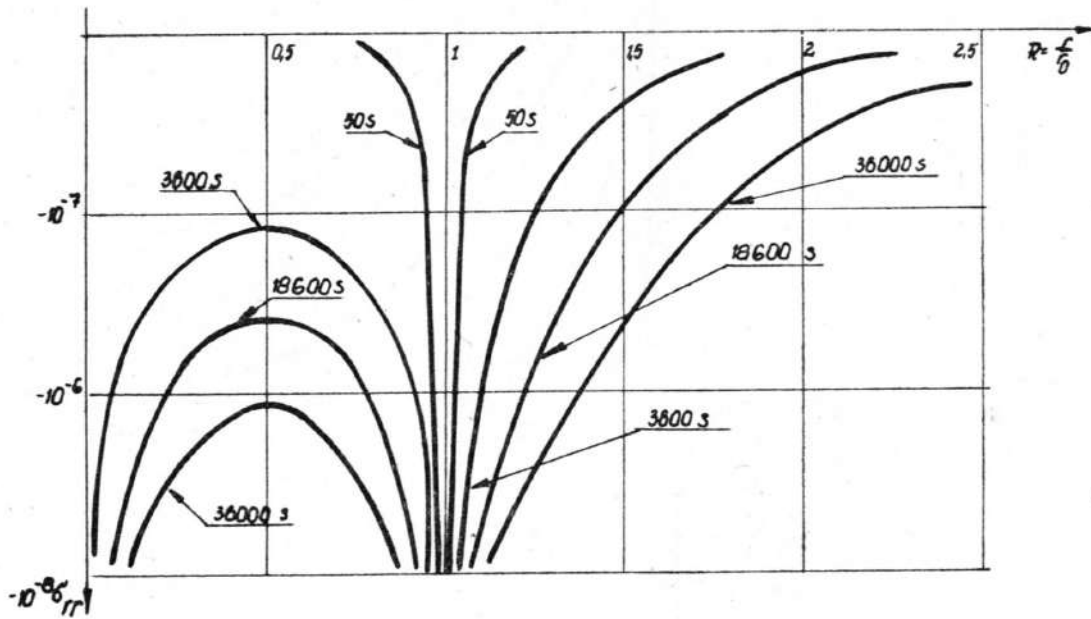
Na rys. 2. przedstawiono zmianę naprężeń promieniowych σ_{rr} . Widoczny jest wyraźny podział krzywych na dwie części - jedna dla $R < 1$ oraz druga dla $R > 1$. Oznacza to, że wewnątrz nieskończonego walca / $R < 1$ / występują naprężenia ściskające oddzielone od pozostałego obszaru osobliwą powierzchnią walcową dla $R = 1$. W obszarze na zewnątrz walca panują również naprężenia ściskające. Nieciągłość naprężeń spowodowana jest dystrybucyjnym charakterem źródła dyfuzji dla $R = 1$ oraz $t = 0$. Wraz z upływem czasu i oddalaniem się od źródła naprężenia σ_{rr} maleją i dążą do zera.

Rys. 3. przedstawia naprężenia obwodowe $\sigma_{\theta\theta}$. Wewnątrz walca występują naprężenia ściskające, a na zewnątrz rozciągające. Miejsce przyłożenia źródła jest miejscem separacji naprężeń.

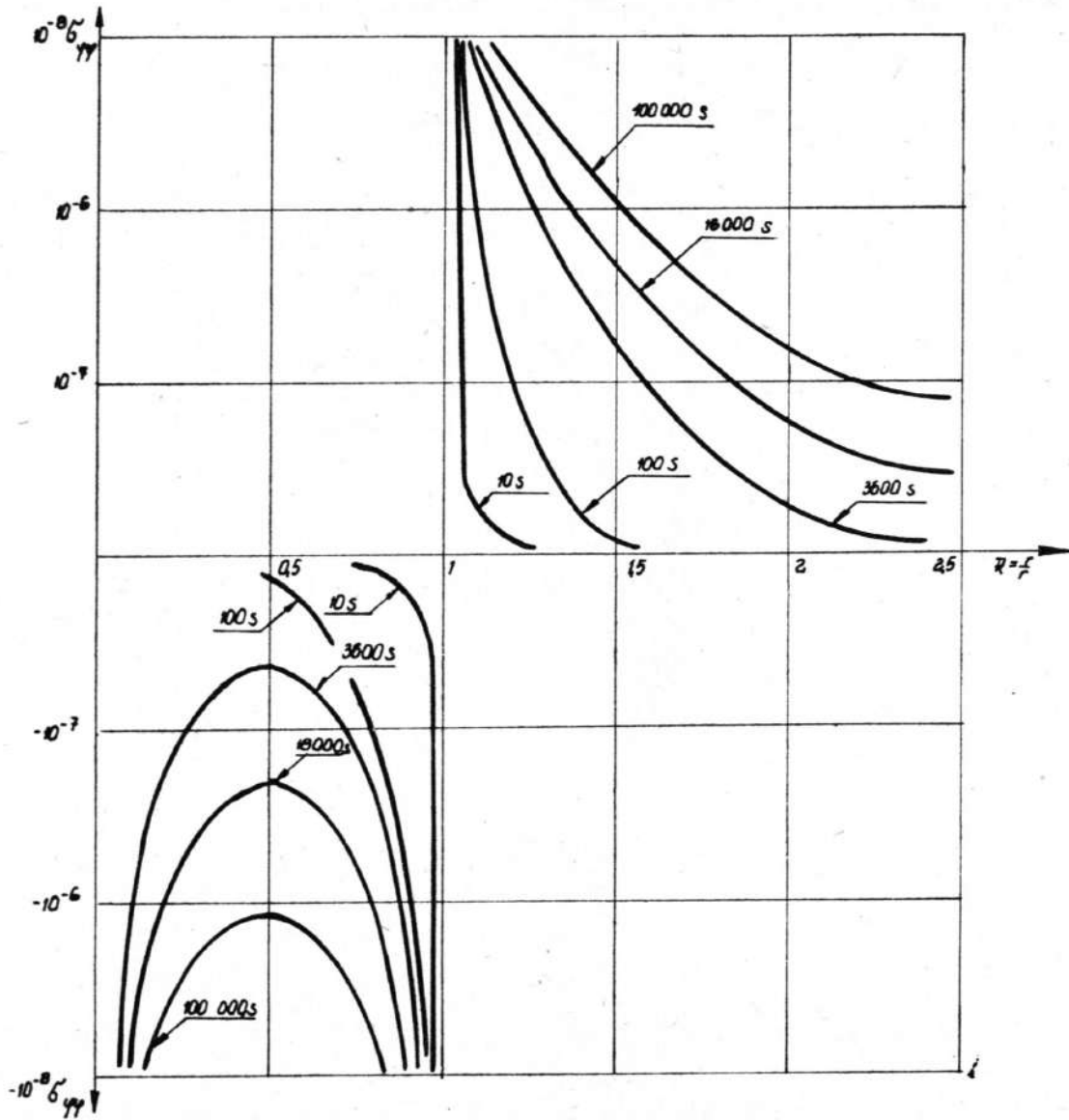
Rys. 4. ilustruje naprężenia poosiowe σ_{zz} . Otrzymano w tym wypadku bardzo ciekawy wykres. Dla małych czasów naprężenia są w całym obszarze rozciągające o wyraźnie osobliwym charakterze /dla $R = 1$ / . Wraz ze wzrostem czasu naprężenia zmieniają znak, ale mają wyraźną tendencję do wyrówny-

wania się.

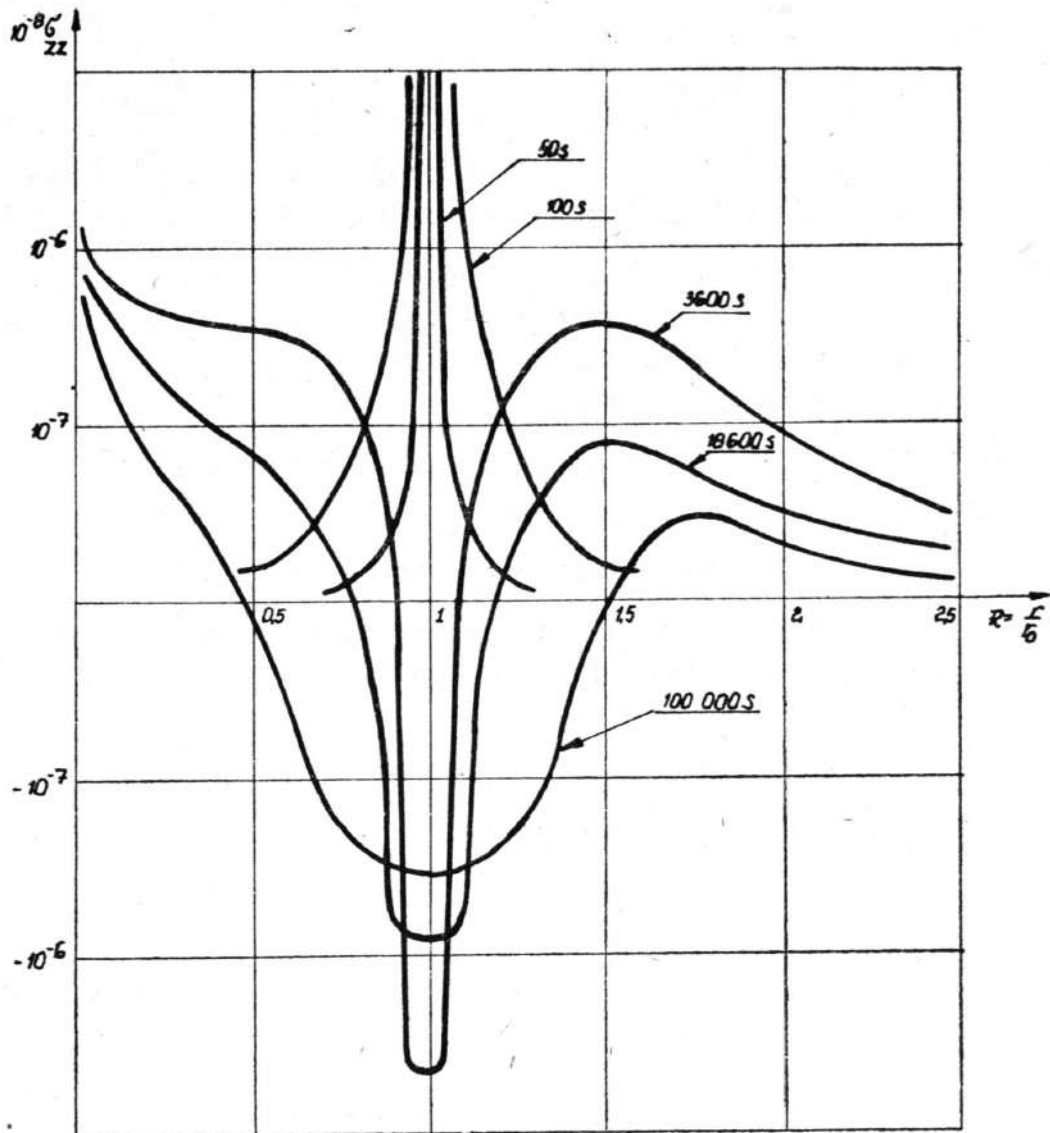
Rys. 5. przedstawia promieniowe przemieszczenia ciała. Również w tym przypadku widoczne jest rozdzielenie przemieszczeń, które dla bardzo dużych czasów zanika.



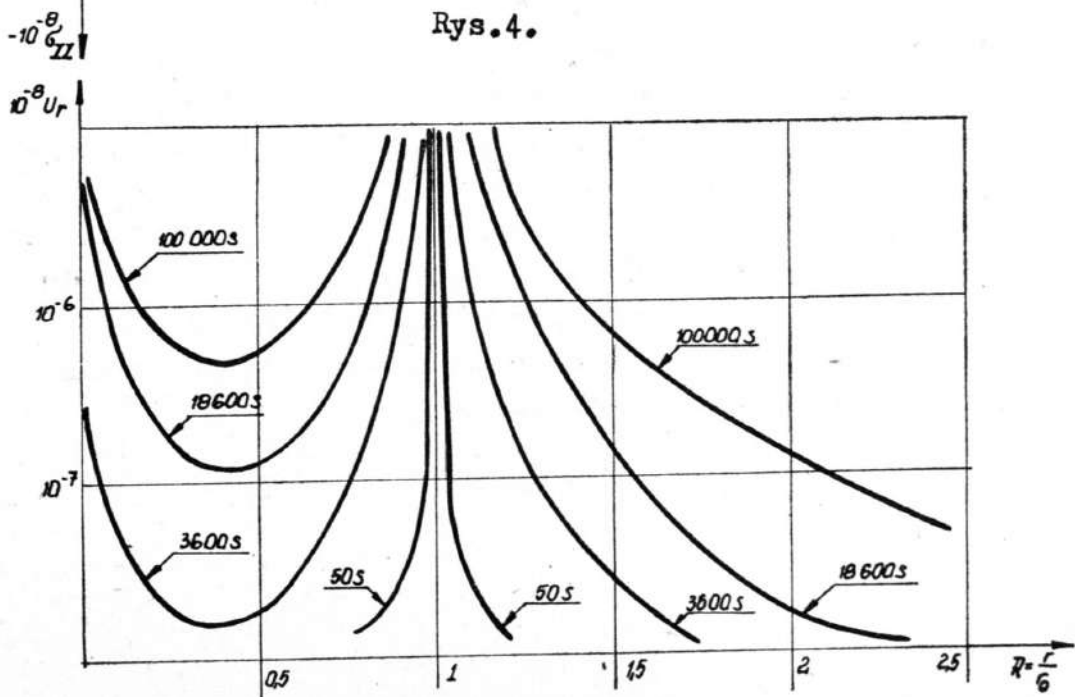
Rys. 2.



Rys. 3.



Rys. 4.



Rys. 5.

B i b l i o g r a f i a

- [1] W. Dudziak, Zagadnienia termodyfuzji w ośrodkach sprężystych, Praca doktorska, Politechnika Poznańska, 1975.
- [2] W. Dudziak, Wpływ sprzężenia zjawisk termicznych i dyfuzji na koncentrację czynnika dyfundującego w przypadku działania chwilowego źródła dyfuzji, Rozprawy Inżynierskie, Praca w druku.
- [3] W. Nowacki, Certain Problems of Thermodiffusion in Solids, Archive of Mechanics, 1971.
- [4] W. Nowacki, Termosprężystość, Ossolineum, 1972.
- [5] J. S. Podstrigacz, Difierencjalni urawnienia zadaczi tiermodiffuzji w twierdomu deformirowanomu tili, DAN URSR, 2, 1962.
- [6] I. M. Ryżyk, I. S. Gradsztiejn, Tablicy integralow, sum, rjadow i proizwiedienij, Izd. Nauka, Moskwa 1971.

THE STRESS AND DISPLACEMENT STATE IN A BOUNDLESS SOLID CAUSED BY THE THERMALDIFFUSION PROCESS

Summary

In the paper, the distribution of stresses and displacements caused by thermal diffusion process in a boundless solid was determined. The process is caused by instantaneous activity of a diffusion source which was applied to the side surface of an infinite cylinder /with radius r_0 / in raised temperature. The solution of a system of partial differential equation was presented and later, the numerical calculation based on a chosen technical process of cementation was performed. Basing on numerical example the diagram of the stress and displacement state was made.

СОСТОЯНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ВЫЗВАНО ПРОЦЕССОМ ТЕРМОДИФФУЗИИ

Резюме

В работе обозначается распределение напряжений и перемещений, вызванных процессом термодиффузии в неограниченном твердом теле. Процесс происходит в результате кратковременного действия теплого источника, приложенного к боковой поверхности бесконечного цилиндра радиуса, при повышенной температуре.

Указывается также решение системы дифференциальных уравнений, а затем на основании подобранного технического процесса теплехимической обработки проводятся численные вычисления. На основе числового примера вычерчено диаграммы состояния напряжений и перемещений.