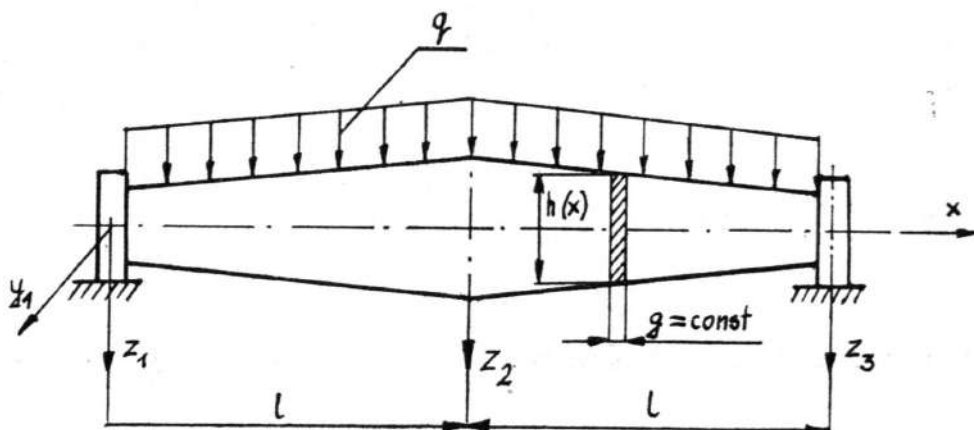


Arnold Wilczyński
WSP Bydgoszcz

STATECZNOŚĆ PŁASKIEJ POSTACI ZGINANIA OBCIĄŻONEJ
RÓWNOMIERNIE BELKI O ZMIENNYM PRZEKROJU

1. W s t ę p

W pracy rozpatrzono zagadnienie stateczności płaskiej postaci zginania dwupodporowej belki o zmiennym przekroju, poddanej działaniu równomiernie rozłożonego na całej długości belki obciążenia q /rys. 1./. Końce belki są przy tym podpar-



Rys.1.

te w ten sposób, że niemożliwy jest ich obrót względem osi x oraz odpowiednio względem osi z_1 i z_3 .

Jeżeli chodzi o geometrię belki, przyjęto założenia:

1. Belka jest symetryczna względem osi z_2 - składa się z dwu symetrycznych ramion.
2. Przekrój poprzeczny belki ma stałą grubość g , a jego wysokość h zmienia się liniowo wzdłuż ramion.
3. Osie y i z są głównymi centralnymi osiami bezwładności

przekroju poprzecznego.

4. Sztywność belki na skręcanie nieswobodne jest równa zeru.
5. Sztywność zginania względem osi y jest znacznie większa od sztywności względem osi z .

Celem pracy jest wyznaczenie pierwszych krytycznych wartości obciążenia przy różnych zbieżnościach ramion belki. Zadanie rozwiązano wychodząc z równań różniczkowych równowagi obojętnej belki i stosując metodę kolejnych przybliżeń.

Niniejsza praca jest wynikiem kontynuowania przez autora badań nad statecznością płaskiej postaci zginania belek spoczywających na dwóch podporach uniemożliwiających obrót końców belki w sposób podany wyżej. W pracy [3] rozpatrzono stateczność belki, na którą działa równomiernie rozłożone obciążenie ciągłe, przy czym przekrój belki jest stały. Również w pracy [4] belka ma stały przekrój, lecz jej oś jest załamana - symetryczne ramiona belki tworzą pewien kąt. Symetryczne obciążenie belki składa się z siły skupionej i równomiernego obciążenia ciągłego. Wreszcie w pracy [5] zajęto się belką o zmiennym przekroju, o identycznej geometrii jak belka rozpatrywana obecnie, obciążonej w środku rozpiętości siłą skupioną prostopadłą do osi belki.

2. R ó w n a n i a r ó w n o w a g i o b o j ę t n e j

Na rys. 2. przedstawiono uwolnioną od więzów belkę po utracie przez nią stateczności. Położenie dowolnego przekroju poprzecznego zwichrzonej belki, dla $c \leq x \leq b$, jest określone za pomocą trzech współrzędnych:

- przemieszczenia u środka ciężkości przekroju w kierunku osi y ,
- przemieszczenia w środka ciężkości przekroju w kierunku osi z ,
- kąta obrotu φ przekroju w płaszczyźnie yz .

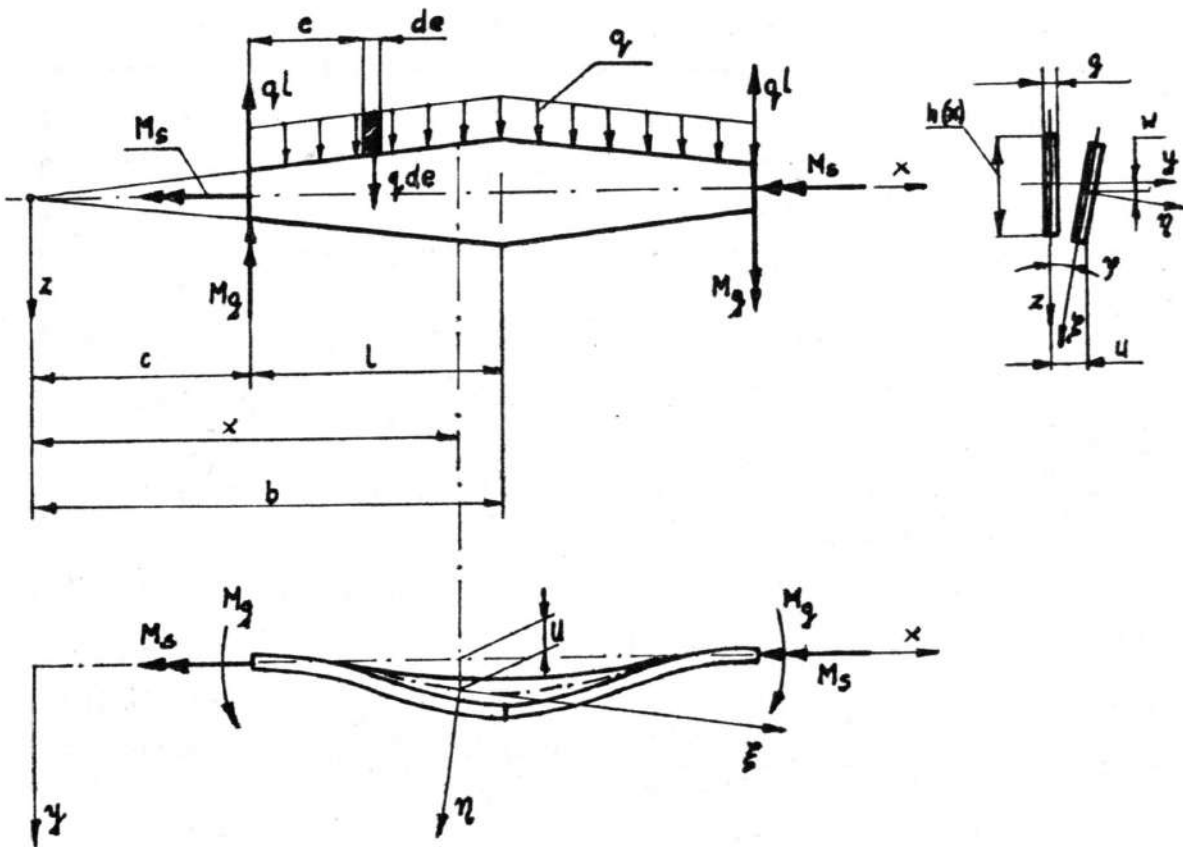
Składowe momentów sił zewnętrznych, dla dowolnego przekroju określonego współrzędną x , wynoszą:

$$M_x = -M_g + qlu(x) - \int_c^x q[u(x) - u(e) - a(e)\varphi(e)] de,$$

$$(2.1) M_y = -ql(x-c) + \int_c^x q(x-e) de,$$

$$M_z = -M_g,$$

przy czym oznaczają: M_g - moment oddziaływania podpory w płaszczyźnie xy , M_s - moment oddziaływania podpory w płaszczyźnie yz , l - długość ramienia belki, a - odległość od środka ciężkości przekroju do znajdującego się nad nim punktu przyłożenia obciążenia ciągłego, $0 \leq a \leq 0,5 h$.



Rys.2.

Po wprowadzeniu lokalnego układu współrzędnych ξ, η, ζ , związanego ze zwichrzonym przekrojem w miejscu x , składowe momentów względem osi tego układu będą określone wzorami:

$$M_{\xi} = M_x (\cos x, \xi) + M_y \cos (y, \xi) + M_z \cos (z, \xi),$$

$$(2.2) M_{\eta} = M_x \cos (x, \eta) + M_y \cos (y, \eta) + M_z \cos (z, \eta),$$

$$M_{\zeta} = M_x \cos (x, \zeta) + M_y \cos (y, \zeta) + M_z \cos (z, \zeta).$$

Występujące w powyższych wzorach cosinusy kierunkowe z dokładnością do małych pierwszego rzędu mają wartości podane w tabelicy 1.

Tablica 1.

	x	y	z
ξ	1	u'	w'
η	$-u'$	1	φ
ζ	$-w'$	$-\varphi$	1

Równania równowagi obojętnej belki w stanie zwichrzonym, przy uwzględnieniu założenia o zerowej sztywności belki na skręcenie nieswobodne, wyrażone z dokładnością do małych pierwszego rzędu mają postać:

$$(2.3) EI_{\eta} w'' = M_{\eta}, \quad EI_{\zeta} u'' = -M_{\zeta}, \quad GI_k \varphi' = -M_{\xi},$$

przy czym oznaczają: EI_{η} i EI_{ζ} - sztywność zginania belki odpowiednio względem osi η i ζ , GI_k - sztywność skręcania belki względem osi ξ . Powyższe sztywności, ze względu na zmienność przekroju belki, są funkcjami współrzędnej x .

Podstawiając związki (2.2) i (2.1) do równań (2.3) i pomijając małe wyższego rzędu, otrzymano następujący układ równań równowagi obojętnej belki:

$$EJ_2(x)w''(x) = M_s u'(x) - M_g \varphi(x) - q \left[l - \frac{1}{2}(x-c) \right] (x-c),$$

$$(2.4) \quad EJ_5(x)u''(x) = M_g - M_s w'(x) - q \left[l - \frac{1}{2}(x-c) \right] (x-c) \varphi'(x),$$

$$GJ_k(x)\varphi'(x) = M_s + M_g w'(x) - q[l - (x-c)]u(x) + q \left[l - \frac{1}{2}(x-c) \right] (x-c)u'(x) -$$

$$- q \int_c^x [u(e) + a(e)\varphi(e)] de.$$

Ponieważ, zgodnie z założeniem 5, $EI_2 \gg EI_5$, przeto w jest pomijalnie małe. Pomijalność w pociąga za sobą pomijalność w' , w związku z czym w dalszym ciągu pracy składniki $M_s w'$ i $M_g w'$ równań (2.4) nie będą uwzględniane.

Równania (2.4) są niedogodne do badań ze względu na występowanie stałych M_g i M_s oraz całki w trzecim równaniu. Dlatego zróżniczkowano drugie i trzecie z tych równań, otrzymując układ równań różniczkowych liniowych o zmiennych współczynnikach:

$$EJ_2(x)u'''(x) + EJ_2'(x)u''(x) + q \left[l - \frac{1}{2}(x-c) \right] (x-c) \varphi'(x) + q \left[l - (x-c) \right] \varphi(x) = 0;$$

(2.5)

$$GJ_k(x)\varphi''(x) + GJ_k'(x)\varphi'(x) + qa(x)\varphi(x) - q \left[l - \frac{1}{2}(x-c) \right] (x-c)u''(x) = 0.$$

Ograniczając się w dalszym ciągu do belek o przekroju prostokątnym, na podstawie założenia 2 otrzymamy dla $c \leq x \leq b$ następujące zależności:

$$(2.6) \quad h(x) = h(b) \frac{x}{b},$$

$$J_2(x) = \frac{1}{12} h(x) g^3 = J_2(b) \frac{x}{b},$$

$$J_k(x) = \frac{1}{3} h(x) g^3 = \left[1 - 0,63 \frac{g}{h(x)} \right].$$

Ponieważ przekrój prostokątny będzie wydłużony /wysoki i cienki/, co wynika z założenia 5, zatem moment bezwładności przekroju na skręcanie może być wyrażony za pomocą wzoru przybliżonego:

$$(2.6a) \quad J_k(x) = \frac{1}{3} h(x) q^3 = J_k(b) \frac{x}{b}.$$

Również wielkość a , tzn. odległość od środka ciężkości przekroju do znajdującego się nad nim punktu przyłożenia obciążenia ciągłego, jest funkcją x :

$$a(x) = a(b) \frac{x}{b}.$$

Równania (2.5) przyjmą teraz postać:

$$E J_{\frac{x}{b}} u'''(x) + E J_{\frac{x}{b}} u''(x) + q \left[l - \frac{1}{2}(x-c) \right] (x-c) \varphi'(x) + q(b-x) \varphi(x) = 0,$$

(2.7)

$$G J_k(b) \frac{x}{b} \varphi''(x) + G J_k(b) \frac{1}{b} \varphi'(x) + q a(b) \frac{x}{b} \varphi(x) - q \left[l - \frac{1}{2}(x-c) \right] (x-c) u''(x) = 0.$$

W celu uproszczenia zapisu wprowadzono nową zmienną bezwymiarową

$$(2.8) \quad t = \frac{x}{b},$$

co pociąga za sobą zastąpienie funkcji $u(x)$ i $\varphi(x)$ odpowiednio przez funkcje $v(t)$ i $\psi(t)$. Wprowadzając ponadto współczynnik stateczności γ

$$(2.9) \quad \gamma = \frac{q l^3}{\sqrt{E J_{\frac{1}{b}} G J_k(b)}}$$

oraz oznaczenia

$$(2.10) \quad \omega = \sqrt{\frac{G J_k(b)}{E J_{\frac{1}{b}}}}, \quad \varepsilon = \frac{c}{b}, \quad \rho = \frac{b}{l} = \frac{1}{1-\varepsilon},$$

$$\lambda = \frac{a(b)}{l},$$

równaniom (2.7) nadano ostatecznie postać

$$(2.11) \quad v'''(t) + \frac{1}{t} v''(t) + \gamma \omega^2 \rho^4 \left[1 - \frac{1}{2}(t+\varepsilon)\right] \left(1 - \frac{\varepsilon}{t}\right) v'(t) + \gamma \omega^2 \rho^4 \frac{1-t}{t} v(t) = 0,$$

$$\psi''(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \psi'(\varepsilon) + \lambda \gamma \frac{1}{\omega^2} \rho^2 \psi(\varepsilon) - \gamma \omega^2 \rho^2 \left[1 - \frac{1}{2}(\varepsilon+t)\right] \left(1 - \frac{\varepsilon}{t}\right) v''(t) = 0.$$

3. Funkcje $v(t)$ i $\psi(t)$

Równania równowagi obojętnej (2.11) są słuszne dla t zawartego w przedziale $\langle \varepsilon, 1 \rangle$. Korzystając z faktu, że funkcje $v(t)$ i $\psi(t)$ wraz ze swymi pochodnymi są ciągłe w tym przedziale, można je przedstawić w postaci szeregu Taylora z resztą wyrażoną wzorem całkowym:

$$(3.1) \quad v(t) = v(\varepsilon) + (t-\varepsilon)v'(\varepsilon) + \frac{1}{2}(t-\varepsilon)^2 v''(\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^t (t-s)^2 v'''(s) ds,$$

$$\psi(t) = \psi(\varepsilon) + (t-\varepsilon)\psi'(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^t (t-s)\psi''(s) ds.$$

Ze sposobu podparcia końców belki wynikają następujące warunki brzegowe

$$u(c) = 0, \quad u'(c) = 0, \quad \psi(c) = 0,$$

które po przejściu na zmienną t przyjmują postać:

$$(3.2) \quad v'(\varepsilon) = 0, \quad v''(\varepsilon) = 0, \quad \psi(\varepsilon) = 0.$$

Uwzględniając powyższe warunki we wzorach (3.1) i kładąc do tychże wzorów v''' i ψ'' określone z równań (2.11), otrzymamy:

$$v(t) = \frac{1}{2}(t-\varepsilon)^2 v''(\varepsilon) - \frac{1}{2} \omega \rho^3 \int_{\varepsilon}^t \frac{t-s}{s} \left[\frac{1}{\omega \rho^3} v''(s) + \gamma \rho(s-\varepsilon) \left[1 - \frac{1}{2}(\varepsilon+s) \right] \psi'(s) + \gamma \rho(1-s) \psi(s) \right] ds,$$

$$\psi(t) = (t-\varepsilon) \psi'(\varepsilon) - \frac{\rho}{\omega \rho} \int_{\varepsilon}^t \frac{t-s}{s} \left\{ \frac{\omega \rho}{\rho} \psi'(s) + \lambda \gamma \rho \rho s \psi(s) - \gamma \rho(s-\varepsilon) \left[1 - \frac{1}{2}(\varepsilon+s) \right] v''(s) \right\} ds.$$

Po wykonaniu całkowania przez części mamy:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2}(t-\varepsilon)^2 v''(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^t \frac{t-s}{s^3} v''(s) ds + \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma \omega \rho^4 \int_{\varepsilon}^t \left[-\frac{1}{2}s^2 + s - s^{-1}t^2 + s^{-2}\varepsilon t^2 \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}t^2 - \varepsilon \right] \psi(s) ds, \\ (3.3) \quad \psi(t) &= (t-\varepsilon) \psi'(\varepsilon) + \gamma \frac{1}{\omega \rho} \rho^2 \left[1 - \frac{1}{2}(\varepsilon+t) \right] (1 - \frac{\varepsilon}{t}) v'(t) + \\ &\quad + \gamma \frac{1}{\omega \rho} \rho^2 \int_{\varepsilon}^t \left[1 - s^{-3} \varepsilon t (2-\varepsilon) \right] v''(s) ds - \int_{\varepsilon}^t s^{-2} t \psi(s) ds - \lambda \gamma \frac{1}{\omega \rho} \rho^2 \int_{\varepsilon}^t (t-s) \psi(s) ds. \end{aligned}$$

Otrzymane równania stanowią układ równań całkowych Volterra drugiego rodzaju. W celu otrzymania ich rozwiązania przybliżonego zastosowano metodę kolejnych przybliżeń zgodnie ze schematem iteracyjnym:

$$\begin{aligned} v_{n+1}(t) &= v_0(t) + \int_{\varepsilon}^t K_1(t,s) v_n(s) ds + \frac{1}{2} \gamma \omega \rho^4 \int_{\varepsilon}^t K_2(t,s,\varepsilon) \psi_n(s) ds, \\ \psi_{n+1}(t) &= \psi_0(t) + \gamma \frac{1}{\omega \rho} \rho^2 f_1(t,\varepsilon) v_n(t) + \gamma \frac{1}{\omega \rho} \rho^2 \int_{\varepsilon}^t K_3(t,s,\varepsilon) v_n(s) ds + \\ &\quad + \int_{\varepsilon}^t K_4(t,s) \psi_n(s) ds, \end{aligned}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, przy czym przyjęto:

$$V_0(t) = \frac{1}{2}(t-\varepsilon)^2 V''(\varepsilon), \quad \Psi_0(t) = (t-\varepsilon) \Psi'(\varepsilon).$$

Przyjęto ponadto $\lambda = 0$, co będzie uzasadnione w dalszej części pracy. Ze względu na dużą pracochłonność metody ograniczono się do trzech kroków iteracyjnych, uzyskując rozwiązania:

(3.4a)

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{1}{2} V''(\varepsilon) \left\{ \frac{49}{8} t^2 - 8\varepsilon t + \frac{15}{8} \varepsilon^2 - \frac{17}{4} t^2 \ln \frac{t}{\varepsilon} + \frac{5}{4} t^2 \ln^2 \frac{t}{\varepsilon} - \frac{1}{6} t^2 \ln^3 \frac{t}{\varepsilon} + \right. \\ & + \gamma^2 \rho^6 \left[-192 t^6 + \frac{199}{2700} t^5 - \left(\frac{7}{32} - \frac{179}{378 \varepsilon} + \frac{65}{288} \varepsilon^2 \right) t^4 - \left(\frac{119}{54} - \frac{29}{27 \varepsilon} - \frac{7}{27} \varepsilon^2 \right) \varepsilon t^3 - \right. \\ & - \left(\frac{15}{8} - \frac{739}{216 \varepsilon} + \frac{89}{64} \varepsilon^2 \right) \varepsilon^2 t^2 + \left(\frac{9}{2} - \frac{185}{36} \varepsilon + \frac{13}{9} \varepsilon^2 \right) \varepsilon t - \left(\frac{175}{864} - \frac{11191}{43200} \varepsilon + \frac{71}{864} \varepsilon^2 \right) \varepsilon^4 + \\ & + \left\langle \frac{1}{288} t^4 - \frac{2}{45} t^3 + \left(\frac{1}{8} - \frac{17}{48} \varepsilon + \frac{5}{24} \varepsilon^2 \right) t^2 + \left(\frac{19}{9} - \frac{11}{9} \varepsilon \right) \varepsilon t + \right. \\ & \left. \left. + \varepsilon^2 \left(\frac{9}{2} - \frac{59}{12} \varepsilon + \frac{41}{32} \varepsilon^2 \right) \right\rangle t^2 \ln \frac{t}{\varepsilon} + \left\langle \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16} \varepsilon \right) t^2 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \varepsilon \right) t - \right. \\ & \left. - \left(2 - \frac{13}{6} \varepsilon + \frac{9}{16} \varepsilon^2 \right) \varepsilon \right\rangle \varepsilon^2 \ln^2 \frac{t}{\varepsilon} + \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right\rangle \varepsilon^2 t^2 \ln^3 \frac{t}{\varepsilon} \left. \right\} + \\ & + \Psi'(\varepsilon) \left\{ \gamma \omega \rho^4 \left[\frac{57}{256} t^4 - \left(\frac{34}{27} + \frac{1}{3} \varepsilon \right) t^3 - \left(\frac{17}{4} - \frac{45}{16} \varepsilon \right) \varepsilon t^2 + (6 - 3\varepsilon) \varepsilon^2 t - \right. \right. \\ & - \left. \left(\frac{53}{708} - \frac{229}{768} \varepsilon \right) \varepsilon^3 + \left\langle -\frac{9}{64} t^2 + \frac{7}{9} t + \left(\frac{11}{2} - \frac{19}{8} \varepsilon \right) \varepsilon \right\rangle t^2 \ln \frac{t}{\varepsilon} + \right. \\ & + \left\langle \frac{1}{32} t^2 - \frac{1}{6} t - \left(2 - \frac{7}{8} \varepsilon \right) \varepsilon \right\rangle t^2 \ln^2 \frac{t}{\varepsilon} + \left\langle \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \varepsilon \right\rangle \varepsilon t^2 \ln^3 \frac{t}{\varepsilon} \left. \right] + \\ & + \gamma^3 \omega \rho^{10} \left[-\frac{1}{5120} t^8 + \left(\frac{11}{4200} + \frac{1}{1680} \varepsilon \right) t^7 - \left(\frac{5}{384} + \frac{89}{11520} \varepsilon - \frac{1}{5760} \varepsilon^2 \right) t^6 + \right. \\ & + \left(\frac{1}{45} + \frac{259}{10800} \varepsilon + \frac{433}{21600} \varepsilon^2 - \frac{7}{720} \varepsilon^3 \right) t^5 - \left(\frac{1}{36} + \frac{119}{576} \varepsilon - \frac{77}{512} \varepsilon^2 + \frac{217}{9216} \varepsilon^3 \right) \varepsilon t^4 + \\ & + \left(\frac{55}{54} - \frac{49}{72} \varepsilon - \frac{11}{144} \varepsilon^2 + \frac{173}{2160} \varepsilon^3 \right) \varepsilon^2 t^3 - \left(\frac{2}{9} + \frac{1259}{3456} \varepsilon - \frac{94951}{172800} \varepsilon^2 + \frac{907}{5760} \varepsilon^3 \right) \varepsilon^3 t^2 - \\ & - \left(\frac{5}{6} - \frac{185}{144} \varepsilon + \frac{319}{480} \varepsilon^2 + \frac{83}{720} \varepsilon^3 \right) \varepsilon^4 t + \left(\frac{109}{4320} - \frac{637}{14400} \varepsilon + \frac{7031}{26800} \varepsilon^2 - \frac{2521}{483840} \varepsilon^3 \right) \varepsilon^5 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\langle - \left(\frac{1}{288} - \frac{1}{1152} \epsilon \right) t^4 + \left(\frac{2}{45} - \frac{1}{90} \epsilon \right) t^3 - \left(\frac{1}{8} - \frac{5}{48} \epsilon + \frac{13}{128} \epsilon^2 - \frac{75}{1638} \epsilon^3 \right) t^2 - \right. \\
 & - \left. \left(\frac{5}{9} - \frac{2}{3} \epsilon + \frac{7}{36} \epsilon^2 \right) \epsilon t - \left(\frac{7}{6} - \frac{419}{288} \epsilon + \frac{1637}{2880} \epsilon^2 - \frac{25}{384} \epsilon^3 \right) \epsilon^2 \right\rangle \epsilon t^2 \ln \frac{t}{\epsilon} + \\
 & + \left\langle - \left(\frac{1}{16} - \frac{3}{34} \epsilon + \frac{1}{128} \epsilon^2 \right) t^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \epsilon + \frac{1}{24} \epsilon^2 \right) t + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \epsilon + \frac{5}{16} \epsilon^2 - \frac{1}{16} \epsilon^3 \right) \epsilon \right\rangle \epsilon^2 t^2 \ln^2 \frac{t}{\epsilon} + \\
 & + \left\langle - \frac{1}{6} + \frac{5}{24} \epsilon - \frac{1}{12} \epsilon^2 + \frac{1}{96} \epsilon^3 \right\rangle \epsilon^3 t^2 \ln^3 \frac{t}{\epsilon} \left. \right\} , \\
 (3.4b) \quad & \psi(t) = \frac{1}{2} \psi''(\epsilon) \left\{ \gamma \frac{1}{\omega L} \rho^2 \left[- \frac{13}{54} t^3 + \frac{7}{4} t^2 + (6 - \frac{9}{2} \epsilon) \epsilon t - \left(\frac{31}{4} - \frac{128}{27} \epsilon \right) \epsilon^2 + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left\langle \frac{2}{9} t^2 - \frac{3}{2} t - (8 - 5\epsilon) \epsilon \right\rangle t \ln \frac{t}{\epsilon} + \left\langle - \frac{1}{12} t^2 + \frac{1}{2} t + (4 - \frac{9}{4} \epsilon) \epsilon \right\rangle t \ln^2 \frac{t}{\epsilon} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left\langle -1 + \frac{1}{2} \epsilon \right\rangle \epsilon t \ln^3 \frac{t}{\epsilon} \right] + \gamma \frac{3}{\omega L} \rho^8 \left[\frac{5}{4032} t^7 - \frac{79}{4320} t^6 + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left(\frac{59}{120} - \frac{7}{600} \epsilon + \frac{73}{4800} \epsilon^2 \right) t^5 - \left(\frac{1}{8} - \frac{13}{164} \epsilon + \frac{137}{1128} \epsilon^2 + \frac{1}{36} \epsilon^3 \right) t^4 - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \left(\frac{11}{36} + \frac{35}{216} \epsilon - \frac{23}{54} \epsilon^2 + \frac{109}{1128} \epsilon^3 \right) \epsilon t^3 + \left(\frac{11}{4} - \frac{167}{72} \epsilon + \frac{7}{96} \epsilon^2 + \frac{1}{6} \epsilon^3 \right) \epsilon^2 t^2 - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \left(\frac{13}{4} - \frac{1673}{432} \epsilon + \frac{1369}{1080} \epsilon^2 - \frac{41}{316} \epsilon^3 \right) \epsilon^3 t + \left(\frac{67}{72} - \frac{6779}{4320} \epsilon + \frac{12643}{14400} \epsilon^2 - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \frac{3089}{18900} \epsilon^3 \right) \epsilon^4 + \left\langle \left(\frac{3}{80} - \frac{3}{160} \epsilon \right) t^4 - \left(\frac{7}{24} - \frac{7}{48} \epsilon \right) t^3 + \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{36} \epsilon - \frac{13}{12} \epsilon^2 + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{7}{144} \epsilon^3 \right) t^2 - \left(1 - \frac{11}{12} \epsilon + \frac{1}{4} \epsilon^2 \right) \epsilon t - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{36} \epsilon - \frac{13}{144} \epsilon^2 + \frac{7}{32} \epsilon^3 \right) \epsilon^2 \right\rangle \epsilon t \ln \frac{t}{\epsilon} + \\
 & + \left\langle \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12} \epsilon + \frac{1}{48} \epsilon^2 \right) t^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \epsilon + \frac{1}{8} \epsilon^2 \right) t - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8} \epsilon + \frac{5}{12} \epsilon^2 - \frac{1}{16} \epsilon^3 \right) \epsilon \right\rangle \cdot \\
 & \cdot \epsilon^2 t \ln^2 \frac{t}{\epsilon} + \left\langle \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \epsilon + \frac{1}{4} \epsilon^2 - \frac{1}{24} \epsilon^3 \right\rangle \epsilon^3 t \ln^3 \frac{t}{\epsilon} \left. \right\} + \psi'(\epsilon) \left[4t - 4\epsilon - 3t \ln \frac{t}{\epsilon} + \right. \\
 & + \left. t \ln^2 \frac{t}{\epsilon} - \frac{1}{6} t \ln^3 \frac{t}{\epsilon} + \gamma \rho^6 \left[- \frac{7}{200} t^5 + \left(\frac{11}{64} + \frac{1}{36} \epsilon \right) t^4 - \left(\frac{11}{18} + \frac{59}{144} \epsilon - \right. \right. \right. \\
 & - \left. \left. \frac{19}{216} \epsilon^2 \right) t^3 + \left(\frac{13}{8} - \frac{7}{8} \epsilon \right) \epsilon t^2 - \left(\frac{9}{2} - \frac{67}{16} \epsilon + \frac{37}{36} \epsilon^2 \right) \epsilon^2 t + \left(\frac{251}{72} - \frac{2077}{576} \epsilon + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2557}{2700} \varepsilon^2 / \varepsilon^3 + \left\langle \frac{3}{160} t^4 - \frac{7}{48} t^3 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \varepsilon + \frac{7}{144} \varepsilon^2 \right) t^2 + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8} \varepsilon \right) \varepsilon t + \left(2 - \frac{61}{24} \varepsilon + \frac{73}{96} \varepsilon^2 \right) \varepsilon^2 \right\rangle t \ln \frac{t}{\varepsilon} + \left\langle \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} \varepsilon \right) t^2 - \right. \\
 & \left. - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \varepsilon \right) t - \left(2 - \frac{9}{4} \varepsilon + \frac{5}{8} \varepsilon^2 \right) \varepsilon \right\rangle \varepsilon t \ln^2 \frac{t}{\varepsilon} + \left\langle \frac{5}{6} - \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{1}{6} \varepsilon^2 \right\rangle \varepsilon^2 t \ln^3 \frac{t}{\varepsilon} \Bigg\}.
 \end{aligned}$$

4. Krytyczne wartości obciążenia belki

Mając określone funkcje $v(t)$ i $\psi(t)$, możemy wyznaczyć krytyczne wartości obciążenia korzystając z warunków symetrii odkształcenia belki. Dla $x = b$, tzn. dla $t = 1$ mamy mianowicie:

$$(4.1) \quad v'(1) = 0, \quad \psi'(1) = 0$$

Po zrózniczkowaniu funkcji (3.4) i wykorzystaniu warunków (4.1) otrzymujemy układ dwóch równań jednorodnych względem $v''(\varepsilon)$ i $\psi'(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
 & A_{1,1} v''(\varepsilon) + A_{1,2} \psi'(\varepsilon) = 0, \\
 (4.2) \quad & A_{2,1} v''(\varepsilon) + A_{2,2} \psi'(\varepsilon) = 0,
 \end{aligned}$$

przy czym $A_{i,k} = A_{i,k}(\gamma, \omega, \varepsilon, l)$.

Aby zachodziła utrata stateczności, wielkości $v''(\varepsilon)$ i $\psi'(\varepsilon)$ muszą być różne od zera. Zatem wyznacznik charakterys-

tyczny układu równań (4.2) musi być równy zeru

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix} = 0 .$$

Rozwiązując powyższy wyznacznik otrzymamy niezależne od ω i l równanie wiążące współczynniki γ i ε

$$(4.3) \quad \gamma^6 f_1(\varepsilon) + \gamma^4 f_2(\varepsilon) + \gamma^2 f_3(\varepsilon) + f_4(\varepsilon) = 0 .$$

Obliczając, dla danej wartości parametru ε , najmniejszy dodatni pierwiastek γ_1 równania (4.3), możemy wyznaczyć krytyczną wartość $(ql)_{kr}$ obciążenia odpowiadającą danemu ε . Na podstawie zależności (2.9) mamy bowiem

$$(4.4) \quad (ql)_{kr} = \gamma_1 \frac{\sqrt{EJ_z^2(b)GJ_k(b)}}{l^2} .$$

Obliczenia wartości współczynnika γ_1 przeprowadzono dla

$$\varepsilon = 0,7 \div 0,95 .$$

Ponieważ

$$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{h(c)}{h(b)} ,$$

a zbieżność Δ ramienia belki

$$\Delta = \frac{h(b) - h(c)}{l} ,$$

więc zależność między zbieżnością Δ a parametrem ε będzie następująca

$$\Delta = \frac{h(b)}{l} (1 - \varepsilon) .$$

Przyjęcie $\varepsilon = 0,7 \div 0,95$ odpowiada najczęściej stosowanym zbieżnościom w belkach rozpatrywanego typu. Np. dla $h(b)/l = 0,1$

otrzymamy $\Delta = 0,005 \div 0,03$.

Wyniki obliczeń współczynnika stateczności γ_1 zestawiono w tabelicy 2.

Tablica 2.

ε	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95
γ_1	5,30	5,31	5,34	5,40	5,47	5,55

Dla $\varepsilon = 1$, a więc dla belki o stałym przekroju, równanie (4.3) nie ma pierwiastka rzeczywistego dodatniego. Wynika to stąd, iż równania równowagi obojętnej (2.11) tracą swą ważność przy tej wartości parametru ε . Korzystając z wyników uzyskanych w pracy [4], w której zastosowano tą samą metodę matematyczną i również ograniczono się do trzech kroków iteracyjnych, otrzymamy

$$\gamma_1 = 5,64 \quad \text{dla} \quad \varepsilon = 1.$$

Otrzymane wyniki, co już zastrzeżono, dotyczą przypadku $\lambda = 0$. Odpowiada to przyłożeniu obciążenia ciągłego wzdłuż osi belki. W rzeczywistości obciążenie to przykładane jest do górnej krawędzi belki i wówczas $\lambda = 0,5 h/l > 0$. Wartości współczynnika stateczności γ_1 uzyskane przy uwzględnieniu $\lambda > 0$ byłyby mniejsze od uzyskanych przy założeniu $\lambda = 0$, tym samym mniejsze byłoby obciążenie krytyczne $(q_1)_{kr}$. Różnice są jednak niewielkie. Jak wykazano w pracach [3] i [4], dla $\lambda = 0,05$ - co odpowiada przyłożeniu obciążenia ciągłego do górnej krawędzi belki, w przypadku gdy $h = 0,1 l$ - spadek krytycznej wartości obciążenia wynosi 2,5 %. Dotyczy to belki o stałym przekroju. W przypadku belki o zmiennym przekroju spadek ten będzie mniejszy. Ponieważ wpływ współczynnika λ na zmianę wartości współczynnika γ_1 jest niewielki, pominięto go w tej pracy /przyjmując $\lambda = 0$ /, dzięki czemu uproszczono pracochłonne obliczenia.

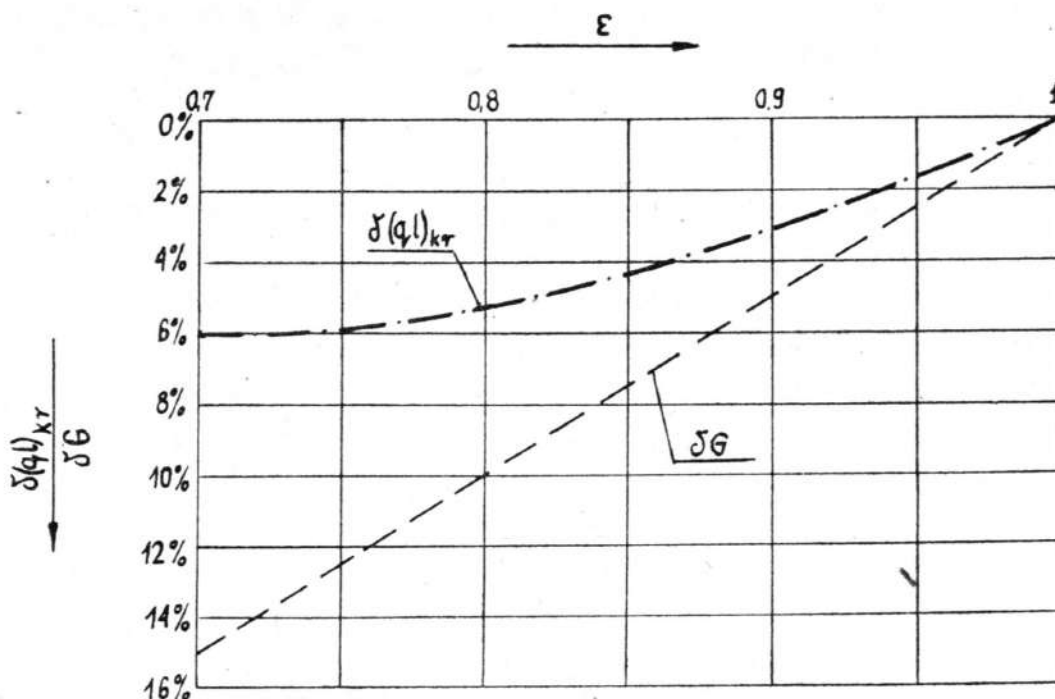
Uzyskane w pracy wyniki są obarczone pewnym błędem wskutek zastosowania skończonej liczby iteracji. Z analizy przeprowadzonej w pracy [4] wynika, że ze względu na szybkozbieżność procesu iteracji błąd ten jest niewielki i przy ograniczeniu się do trzech iteracji nie przekracza 5%. Przy tym wartości współczynników stateczności są mniejsze od wartości ścisłych. Można przyjąć, że również w niniejszej pracy wartości współczynnika γ_1 są mniejsze od wartości ścisłych nie więcej niż o 5%.

Jak widać z zestawienia wyników, mniejszym wartościom parametru ε , czyli większym zbieżnościom ramion belki, odpowiadają mniejsze wartości współczynnika stateczności γ_1 . Dla rodziny rozpatrywanych belek o tych samych wymiarach $h(b)$, g i l wartość obciążenia krytycznego będzie przy obniżaniu ε malała proporcjonalnie do γ_1 , zgodnie z wzorem (4.4). Jednocześnie ze zmniejszaniem ε ulega zmniejszeniu ciężar belki. Stosowanie belek o ramionach zbieżnych będzie uzasadnione, jeżeli procentowy spadek wartości obciążenia krytycznego względem obciążenia krytycznego belki o stałym przekroju będzie mniejszy od procentowego spadku ciężaru belki. Na rys. 3. przedstawiono wykresy względnego spadku $\delta(q_l)_{kr}$ obciążenia krytycznego i względnego spadku δG ciężaru belki w funkcji parametru ε , przy czym

$$\delta(q_l)_{kr} = \frac{(q_l)_{kr}' - (q_l)_{kr}}{(q_l)_{kr}'}, \quad \delta G = \frac{G' - G}{G'}$$

$(q_l)_{kr}'$ jest wartością obciążenia krytycznego dla belki o stałym przekroju, G' jest ciężarem belki o stałym przekroju.

Widzimy, że dla rozpatrywanych wartości ε , $\delta(q_l)_{kr} < \delta G$, przy czym im mniejsze ε , tym większa różnica $\delta G - \delta(q_l)_{kr}$. Stosowanie ramion zbieżnych w omawianych belkach jest więc z punktu widzenia stateczności sprężystej uzasadnione.



Rys.3.

B i b l i o g r a f i a

- [1] Collatz L., Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych, PWN, Warszawa 1960.
- [2] Timoshenko S. P., Gere J. M., Teoria stateczności sprężystej, Arkady, Warszawa 1963.
- [3] Wilczyński A., Stateczność płaskiej postaci zginania belki obciążonej równomiernie, Zeszyty Naukowe WSP Bydgoszcz, Studia Techniczne, z. 4, 1977.
- [4] Wilczyński A., Stateczność płaskiej postaci belki o osi załamanej, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 1, 14, 1976.
- [5] Wilczyński A., Stateczność płaskiej postaci zginania belki o zmiennym przekroju obciążonej siłą skupioną, Zeszyty Naukowe WSP Bydgoszcz, Studia Techniczne, z. 5, 1978.

THE STABILITY OF PLAIN FORM OF BENDING OF A UNIFORMLY
LOADED BEAM WITH A CHANGING CROSS-SECTION

Summary

In this work the author considered the problem of the stability of a plain form of bending a two bearing beam with a changing cross-section which was under the influence of equally distributed uniform load. The cross-section of symmetrical beam arms has constant width and linearly changing height. The chosen beams had their torsional rigidity negligibly small and their flexural rigidity in the plane of load action was much bigger than the rigidity in the vertical plane. It was assumed that the ends of the beam were supported in such a way that their turn was possible only round the vertical axis to the plane of load action. The problem was solved with the successive approximation method - starting from the differential equation of indifferent equilibrium. Critical load values dealing with the beams with the lengthened rectangular shape of their cross-section were determined in dependance on the taper of beams arms.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА НАГРУЖЕННОЙ
РАВНОМЕРНО БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Резюме

В работе рассмотрено вопрос устойчивости плоской формы изгиба в двухопорной балки переменного сечения, равномерно нагруженной, распределенной сплошной нагрузкой. Поперечное сечение симметрических стрел балки имеет постоянную ширину и линейно переменную высоту. Рассмотрено только балки, которых жесткость на несвободное скручивание является незначительной, а жесткость изгиба в плоскости действия нагрузки существенно превышает жесткость в перпендикулярной плоскости. Принято, что концы балки оперты таким образом, что их вращение возможно лишь вокруг осей, перпендикулярных к плоскости действия нагрузки.

Задачу решено методом последовательных приближений, пользуясь дифференциальными уравнениями нейтрального равновесия. Критические значения нагрузок для балок с узким прямоугольным сечением рассчитаны в зависимости от совпадения стрел балки.