

Jerzy Napiórkowski
Stanisław Woelke

O PEWNYM DYDAKTYCZNIE RACJONALNYM BADANIU
OGÓLNEGO I ZŁOŻONEGO RUCHU BRYŁY

W s t ę p

W trakcie studiowania mechaniki technicznej w politechnikach oraz na kierunkach wychowania technicznego w wyższych szkołach pedagogicznych i uniwersytetach studenci napotykają na poważne trudności, wynikające głównie z faktu, że mechanika operuje całym szeregiem pojęć abstrakcyjnych i to zarówno o charakterze podstawowym, jak - masa, czas absolutny, siła czy układ inercjalny, jak też pojęć wtórnych, jak - punkt materialny, układ materialny dyskretny, ciągły itp. Wiele z nich nie ma żadnej interpretacji fizycznej (można tu wspomnieć choćby o momencie wektora względem punktu), co stanowi dodatkowe utrudnienie w rozumieniu samych pojęć, jak i związków oraz zależności, jakie zachodzą między tymi pojęciami.

Przeciętny student wymienionych szkół wyższych nie jest przygotowany i przyzwyczajony do swobodnego operowania przytoczonymi wyrażeniami i w tym można upatrywać, między innymi, źródeł trudności w rozumieniu i przyswajaniu sobie przez niego treści przedmiotu. Rzecz jasna, mechanika jako całość jest nauką abstrakcyjną i rezygnować z jej pojęć nie można i nie da się, gdyż wszelkie próby upogładowienia poszczególnych tematów doprowadzą do tak znacznego spłylenia treści, że efekt dydaktyczny będzie co najmniej wątpliwy, a sam przedmiot stanie się zlepkiem słabo powiązanych ze sobą luźnych przykładów, nie podporządkowanych ogólnym zasadom, na których mechanika się opiera. Byłaby to zasada nauczania podobnych zjawisk według tego, co je dzieli, a nie, jak być powinno, według tego, co je łączy. Wyżej przytoczoną tezę zilustrować można dyskusją, jaka toczyła się niedawno w związku z reformą progra-

mów nauczania w politechnikach. Dotyczyła ona pytania, czy do programów nauczania mechaniki ma być włączone laboratorium z tego przedmiotu. Zdania nauczycieli akademickich w tej kwestii były podzielone, w wyniku czego do Ministerstwa Nauki, Szkolnictwa Wyższego i Techniki przesłano z politechnik programy w dwóch alternatywnych wersjach. Powołana przez Ministerstwo Komisja Wydziału IV PAN wypowiedziała się za skreśleniem laboratorium z mechaniki z proponowanych programów i takie założenia są obecnie we wspomnianych szkołach realizowane.

Przy przedstawionym stanie rzeczy jedyna możliwość efektywnego działania dydaktycznego na gruncie mechaniki leży w udoskonaleniu opracowań poszczególnych tematów pod kątem optymalnego przyswojenia przez studentów zawartych w temacie treści. Na realizację takich zamierzeń składać się będą takie działania, jak: opracowanie struktury mechaniki i wskazanie miejsca danego tematu w całym przedmiocie, wskazanie związku danego zagadnienia z ogólnymi prawami fizycznymi, objaśnienie przyjętego w rozważaniach modelu mechanicznego i zakresu przystosowania tego modelu do rzeczywistości, sformułowanie założeń wstępnych na których rozważania są oparte, przejrzyste wyprowadzenie odpowiednich wzorów i jakość ich interpretacji. Naszym zdaniem istnieją jeszcze inne znaczne możliwości usprawnień w dydaktyce mechaniki w omawianym tu kierunku.

W pracy tej przedstawiono koncepcję realizacji postawionych zadań w zakresie ruchu ogólnego bryły i ruchu złożonego punktu jako pewnej odmianie zagadnienia podstawowego. Temat ten umieszczony jest w programie nauczania mechaniki technicznej na kierunku wychowania technicznego Wyższych Szkół Pedagogicznych w pewnej postaci uproszczonej - mianowicie jako ruch bryły wokół stałej osi. Jednakże w przypadku podjęcia, np. w ramach seminarium dyplomowego dyskusji nad jakimikolwiek zagadnieniami z zakresu kinematyki czy dynamiki bryły dokładne opracowanie zagadnienia ruchu ogólnego staje się nieodzowne, gdyż stanowi punkt wyjścia do rozpatrywania ta-

kich problemów, jak np. dynamiczne wyrównowanie ciał w ruchu, reakcje dynamiczne łożysk, dynamiczne równanie Eulera dla ruchu bryły, zjawiska żyroskopowe itp. Może się wydawać, że przytoczone zagadnienia są zbyt szczegółowe, jeśli uważać je za składowe przygotowania absolwenta kierunku wychowania technicznego WSP. Ważność podjętego tematu jest w pełni uzasadniona, gdyż w ramach tych zagadnień jest dopiero możliwe wyjaśnienie np. jazdy na rowerze czy działania dziecinnej zabawki - "bąka". W pierwszej kolejności w artykule przedstawiono dotychczasowy sposób opisu zagadnienia i jego krytykę (punkt 2. i 3.) , a następnie propozycje dotyczące odmiennego ujęcia zagadnienia ogólnego ruchu bryły (punkt 4.) i wnioski.

2. Metodyka badania ruchu ogólnego bryły

Ponieważ kinematyka ruchu ogólnego bryły sprowadza się do opisu położenia jednego ruchomego kartezjańskiego układu współrzędnych względem drugiego układu stałego, przeto w pierwszej kolejności należy zbadać możliwe wzajemne położenia dwóch układów współrzędnych względem siebie. Tutaj przedstawiono ujęcie oparte na pracach [1] , [2] , [3] i [4] .

Jeżeli chodzi o przesunięcie równoległe dwóch układów współrzędnych, jak to pokazano na rys. 1., to prawo transformacji jest liniowe i wyraża się prostym wzorem:

$$(2.1) \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

lub w postaci skalarowej:

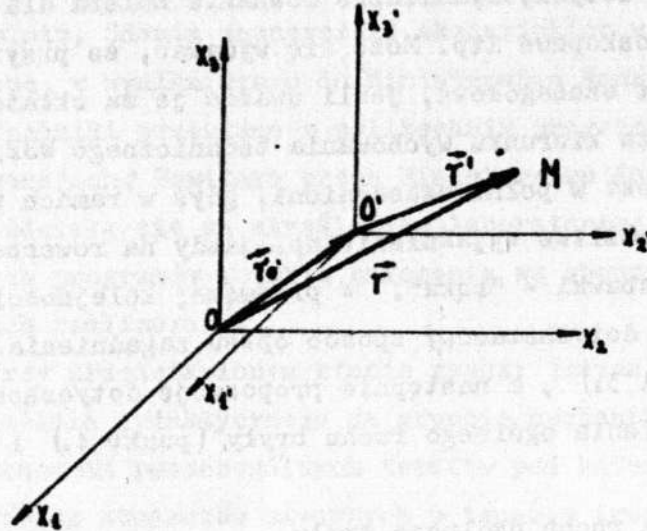
$$(2.2) \quad x_i = x_{0i} + x_{i'} \quad i, i' = 1, 2, 3.$$

gdzie: \vec{r} - wektor wodzący punktu M, wyrażony w układzie stałym x_i ,

\vec{r}_0 - wektor położenia początku układu ruchomego, wyrażony w układzie stałym,

\vec{r}' - wektor położenia punktu M, wyrażony w układzie ruchomym,

$x_{i'}$, x_i , x_{0i} oraz x_i , odpowiednio współrzędne wektorów \vec{r} , \vec{r}_0 ,
i \vec{r}' .



rys. 1. Przesunięcie równoległe jednego układu współrzędnych względem drugiego

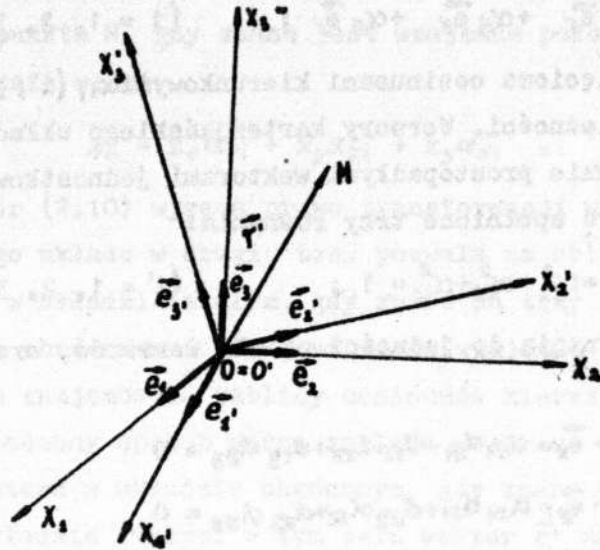
Wektor primowany oznacza zawsze wektor wyrażony w układzie ruchomym, a wskaźniki primowane oznaczają numerację współrzędnych w układzie ruchomym. Wektory i wskaźniki nieprimowane oznaczają zawsze przynależność do układu stałego.

Bardziej złożony charakter ma obrót jednego układu względem drugiego (rys. 2.) , Przez $\alpha_{ij} = \cos(x_i, x_j)$ oznacza się cosinusy kątów między osiami x_i i x_j ($i, j = 1, 2, 3$). Te liczby są iloczynami skalarowymi wersorów, czyli:

$$(2.3) \quad \alpha_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 1 \cdot 1 \cdot \cos(x_i, x_j); \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

gdzie \vec{e}_i są wersorami układu obróconego, a \vec{e}_j wersorami układu stałego. Liczby α_{ij} można interpretować jako rzuty wersorów \vec{e}_i na osie x_j lub wersorów \vec{e}_j na osie x_i . Zestawiono je w tabelicy 1. będącej jednocześnie tabliczką mnożenia odpowiednich wersorów. Z prawa przemienności mnożenia skalarowego wektorów, wynika symetria cosinusów α_{ij} względem zamiany wskaźników, co wyraża zależność:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$



Rys. 2. Obrót jednego układu współrzędnych względem drugiego

		x_1	x_2	x_3
		\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
x_1'	\vec{e}_1'	d_{11}	d_{12}	d_{13}
x_2'	\vec{e}_2'	d_{21}	d_{22}	d_{23}
x_3'	\vec{e}_3'	d_{31}	d_{32}	d_{33}

Tablica 1. Zestawienie cosinusów kątów między osiami x_i' i x_j

Mając tablicę cosinusów można wyrazić \vec{e}_1' , \vec{e}_2' , \vec{e}_3' poprzez \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 lub odwrotnie. W pierwszym przypadku każdy z wersorów \vec{e}_i' będzie równy sumie iloczynów wersorów \vec{e}_j przez rzuty \vec{e}_i' na osie x_j , tzn:

$$(2.4) \quad \vec{e}_i' = \alpha_{i1}\vec{e}_1 + \alpha_{i2}\vec{e}_2 + \alpha_{i3}\vec{e}_3 ; \quad (i' = 1, 2, 3) ,$$

w drugim zaś:

$$(2.5) \quad \vec{e}_j = \alpha_{1j} \vec{e}_1 + \alpha_{2j} \vec{e}_2 + \alpha_{3j} \vec{e}_3 ; \quad (j = 1, 2, 3) .$$

Między dziewięcioma cosinusami kierunkowymi α_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) istnieje sześć zależności. Wersory kartezjańskiego układu współrzędnych są wzajemnie prostopadłymi wektorami jednostkowymi, wobec czego muszą być spełnione trzy równania:

$$(2.6) \quad \vec{e}_{i'} \cdot \vec{e}_{i'} = \alpha_{i'1}^2 + \alpha_{i'2}^2 + \alpha_{i'3}^2 = 1 ; \quad (i' = 1, 2, 3) ,$$

powstałe z przyrównania do jedności modułu wersorów, oraz trzy równania:

$$(2.7) \quad \begin{cases} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \alpha_{11} \alpha_{21} + \alpha_{12} \alpha_{22} + \alpha_{13} \alpha_{23} = 0 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \alpha_{21} \alpha_{31} + \alpha_{22} \alpha_{32} + \alpha_{23} \alpha_{33} = 0 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = \alpha_{31} \alpha_{11} + \alpha_{32} \alpha_{12} + \alpha_{33} \alpha_{13} = 0 \end{cases}$$

będące warunkami ich wzajemnej prostopadłości.

Dla określenia położenia układu współrzędnych x_i względem x_i wystarcza podanie trzech wzajemnie niezależnych spośród dziewięciu cosinusów kierunkowych α_{ij} . Pozostałe cosinusy kierunkowe oblicza się z sześciu równań (2.6) i (2.7).

Na tym etapie można przystąpić do znalezienia zależności między współrzędnymi punktu M (rys. 2.) w obu układach współrzędnych.

Jak widać z rysunku, wektor wodzący \vec{r} w układzie x_i ma zapis:

$$(2.8) \quad \vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 .$$

Współrzędna x_i punktu M jest równa rzutowi wektora wodzącego \vec{r} na oś x_i , czyli jest równa iloczynowi skalarowemu:

$$(2.9) \quad x_i = \vec{r} \cdot \vec{e}_i ; \quad (i = 1, 2, 3) .$$

Aby ten iloczyn obliczyć, mnoży się skalarowo związek (2.8) obustronnie przez \vec{e}_i . W wyniku otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{e}_i &= x_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_i) + x_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_i) + x_3 (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_i) = \\ &= x_1 \alpha_{1i} + x_2 \alpha_{2i} + x_3 \alpha_{3i} ; \quad (i = 1, 2, 3) . \end{aligned}$$

Jest to szukana zależność między współrzędnymi x_i i x_i tego samego punktu M, gdy znane jest wzajemne położenie obu układów. Ostatecznie więc:

$$(2.10) \quad x_i = x_1 \alpha_{1i} + x_2 \alpha_{2i} + x_3 \alpha_{3i} .$$

Wzór (2.10) wyraża prawo transformacji współrzędnych wektora z jednego układu w drugi, tzn. pozwala na obliczenie współrzędnych wektora w układzie stałym, gdy znane są trzy jego współrzędne w układzie obróconym i gdy jest znane wzajemne usytuowanie układów wyrażone znajomością tablicy cosinusów kierunkowych.

W podobny sposób można znaleźć wzory na wyznaczenie współrzędnych wektora w układzie obróconym, gdy znane są jego trzy współrzędne w układzie stałym. W tym celu wektor \vec{r}' należy zapisać następująco:

$$(2.11) \quad \vec{r}' = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 ,$$

a następnie obie strony tego związku pomnożyć skalarowo przez \vec{e}_i , tzn.:

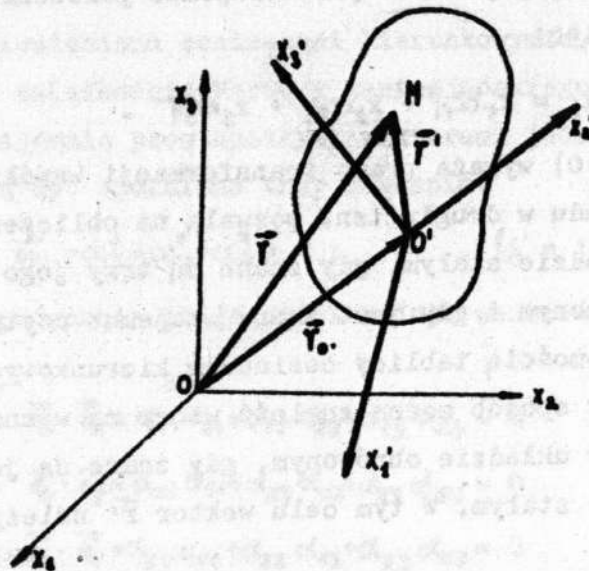
$$\begin{aligned} \vec{r}' \cdot \vec{e}_i &= x_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_i) + x_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_i) + x_3 (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_i) = \\ &= x_1 \alpha_{1i} + x_2 \alpha_{2i} + x_3 \alpha_{3i} . \end{aligned}$$

W tym przypadku prawo transformacji ma więc postać:

$$(2.12) \quad x_i = x_1 \alpha_{1i} + x_2 \alpha_{2i} + x_3 \alpha_{3i} .$$

W ten sposób otrzymano szukane pełne przekształcenie współrzędnych wektora \vec{r}' , wpływające ze zmiany układów.

Przechodząc w dalszym ciągu do kinematyki bryły założono jak zwykle, że układ x_i znajduje się w spoczynku, a układ x_i jest sztywno związany z bryłą i porusza się wraz z nią, co przedstawiono na rys.3. Wobec przyjętego założenia dowolny punkt M bryły ma sztywne usytuowanie względem układu x_i - tym samym współrzędne x_i nie zależą od czasu, natomiast wektor \vec{r}' utworzony z tych współ-



Rys. 3. Szkic wyobrażający ruch ogólny bryły

rzędnych zmienia podczas ruchu kierunek bez zmiany modułu. Wektor chwilowego położenia układu ruchomego \vec{r}_0 , zmienia podczas ruchu zarówno kierunek, jak i moduł. Położenie punktu M zapisuje się więc następująco:

$$(2.13) \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

Dalsze badanie ogólnego ruchu bryły polega na obliczeniu pochodnych e_1, e_2, e_3 względem czasu wersorów układu ruchomego. Wykazuje się, że w rozpatrywanym przypadku istnieje wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$, określający prędkość zmiany kierunków osi x_i w każdej chwili czasu. Ponadto dowodzi się, że zachodzi zależność:

$$(2.14) \quad \dot{e}_i = \vec{\omega} \times e_i$$

Celem realizacji postawionych zadań ustala następujące związki:

$$(2.15) \begin{cases} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 ; & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1 ; & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 ; \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 ; & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 ; & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 , \end{cases}$$

a następnie różniczkuje się je względem czasu. W wyniku tego otrzymuje się:

$$(2.16) \begin{cases} \dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \cdot \dot{\vec{e}}_1 = 0 ; & \dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \dot{\vec{e}}_2 = 0 ; \\ \dot{\vec{e}}_3 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \cdot \dot{\vec{e}}_3 = 0 ; & \dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \dot{\vec{e}}_2 = 0 ; \\ \dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_1 \cdot \dot{\vec{e}}_3 = 0 ; & \dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \dot{\vec{e}}_3 = 0 . \end{cases}$$

Z interpretacji związków (2.16) można wyciągnąć pewne wnioski. Mianowicie z (2.16)₁ wynika, że jeśli $\dot{\vec{e}}_1$ nie jest równy zeru, to musi on być prostopadły do \vec{e}_1 , czyli musi się wyrażać kombinacją liniową:

$$(2.17) \quad \dot{\vec{e}}_1 = \lambda_{12} \vec{e}_2 + \lambda_{13} \vec{e}_3 ,$$

gdzie λ_{12} oraz λ_{13} są na razie pewnymi nieoznaczonymi mnożnikami. Rozumując podobnie, można w oparciu o (2.16)₂ i (2.16)₃ napisać odpowiednio:

$$(2.18) \quad \begin{cases} \dot{\vec{e}}_2 = \lambda_{21} \vec{e}_1 + \lambda_{23} \vec{e}_3 , \\ \dot{\vec{e}}_3 = \lambda_{31} \vec{e}_1 + \lambda_{32} \vec{e}_2 . \end{cases}$$

Wyrażenia (2.17) i (2.18) podstawia się do niewykorzystanych zależności (2.16) i w ten sposób otrzymuje się:

$$(2.19) \quad \begin{cases} (\lambda_{12} \vec{e}_2 + \lambda_{13} \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot (\lambda_{21} \vec{e}_1 + \lambda_{23} \vec{e}_3) = 0 ; \\ (\lambda_{12} \vec{e}_2 + \lambda_{13} \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_1 \cdot (\lambda_{31} \vec{e}_1 + \lambda_{32} \vec{e}_2) = 0 ; \\ (\lambda_{21} \vec{e}_1 + \lambda_{23} \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot (\lambda_{31} \vec{e}_1 + \lambda_{32} \vec{e}_2) = 0 . \end{cases}$$

Wykorzystując własności skalarowego mnożenia wektorów:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i=j ; \\ 0 & \text{gdy } i \neq j , \end{cases}$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kroneckera, można związki (2.19) uprościć do postaci:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \lambda_{12} + \lambda_{21} &= 0 ; \\ \lambda_{13} + \lambda_{31} &= 0 ; \\ \lambda_{23} + \lambda_{32} &= 0 . \end{aligned}$$

Jest widoczne, że spośród sześciu wprowadzonych wskaźników tylko trzy są niezależne - pozostałe wynikają z pierwszych, gdyż zachodzą między nimi trzy związki:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \lambda_{21} &= -\lambda_{12} & ; \\ \lambda_{31} &= -\lambda_{13} & ; \\ \lambda_{23} &= -\lambda_{32} & ; \end{aligned}$$

wyrażające prawo skośnej symetrii względem zmiany wskaźników, co można krótko zapisać:

$$(2.22) \quad \lambda_{\bar{i}} = -\lambda_{ij} \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3) .$$

Trzy niezależne mnożniki można uważać za współrzędne ω_k pewnego wektora $\vec{\omega}$, który nazywa się wektorem prędkości kątowej, przy czym przyporządkowanie mnożników λ_{ij} względem współrzędnych ω_k jest następujące:

$$(2.23) \quad \omega_1 = \lambda_{23} ; \quad \omega_2 = \lambda_{31} ; \quad \omega_3 = \lambda_{12} .$$

Przy wykorzystaniu prawa symetrii (2.22) można pochodne wzorów (2.17) i (2.18) zapisać w postaci:

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \lambda_{12} \vec{e}_2 - \lambda_{31} \vec{e}_3 ; \\ \vec{e}_2 &= \lambda_{23} \vec{e}_3 - \lambda_{12} \vec{e}_1 ; \\ \vec{e}_3 &= \lambda_{31} \vec{e}_1 - \lambda_{23} \vec{e}_2 , \end{aligned}$$

a dalej - podstawiając do (2.24) wprowadzone współrzędne ω_k (2.23) otrzymuje się:

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \vec{e}_1' &= \omega_2 \vec{e}_2 - \omega_3 \vec{e}_3 ; \\ \vec{e}_2' &= \omega_3 \vec{e}_3 - \omega_1 \vec{e}_1 ; \\ \vec{e}_3' &= \omega_1 \vec{e}_1 - \omega_2 \vec{e}_2 . \end{aligned}$$

Do wzorów (2.25), wyrażających pochodne wersorów, podstawia się teraz współrzędne ω_i wyrażone za pomocą samego wektora \vec{c} , tzn.

$$\omega_1 = \vec{c} \cdot \vec{e}_1 ; \quad \omega_2 = \vec{c} \cdot \vec{e}_2 ; \quad \omega_3 = \vec{c} \cdot \vec{e}_3$$

lub w krótszym zapisie:

$$(2.26) \quad \omega_i = \vec{c} \cdot \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3) .$$

Wzory (2.25) przyjmują wtedy postać:

$$(2.27) \quad \begin{cases} \vec{e}_1' = (\vec{c} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_3 - (\vec{c} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_2 ; \\ \vec{e}_2' = (\vec{c} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_1 - (\vec{c} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_3 ; \\ \vec{e}_3' = (\vec{c} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_2 - (\vec{c} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_1 . \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że prawe strony wzorów (2.27) przedstawiają rozwinięcie pewnych podwójnych iloczynów wektorowych o postaci identycznej ze znaną regułą napisaną w odniesieniu do trzech wektorów \vec{a} , \vec{b} i \vec{c}

$$(2.28) \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) .$$

Przy wykorzystaniu rozwinięcia (2.28) wzory (2.27) można zapisać:

$$(2.29) \quad \begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{c} \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) ; \\ \vec{e}_2' = \vec{c} \times (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) ; \\ \vec{e}_3' = \vec{c} \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) . \end{cases}$$

Po wykonaniu końcowych działań na wersorach wzory (2.29) przybierają postać:

$$(2.30) \quad \begin{cases} \dot{\vec{e}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{e}_1 ; \\ \dot{\vec{e}}_2 = \vec{\omega} \times \vec{e}_2 ; \\ \dot{\vec{e}}_3 = \vec{\omega} \times \vec{e}_3 . \end{cases}$$

Ostatecznie więc w odniesieniu do każdego wersora \vec{e}_i , dla jego pochodnej czasowej słuszny jest wzór:

$$(2.31) \quad \dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \times \vec{e}_i, \quad (i = 1, 2, 3) .$$

Udowodnienie powyższej zależności ma kluczowe znaczenie dla badania ogólnego ruchu bryły, gdyż wzory (2.31) określają prędkość zmian położenia wersorów układu ruchowego w zależności od kinematycznego parametru ruchu bryły, jakim jest wektor prędkości kątowej.

Ze wzoru (2.31) można również wyrazić $\vec{\omega}$ za pomocą wersorów \vec{e}_i oraz ich pochodnych $\dot{\vec{e}}_i$. Mianowicie mnożąc (2.31) obustronnie skalarowo przez \vec{e}_j mamy:

$$(2.32) \quad \vec{e}_j \cdot \dot{\vec{e}}_i = \vec{e}_j \cdot (\vec{\omega} \times \vec{e}_i) ,$$

co po wykorzystaniu własności iloczynu mieszanego, zapisanego dla wektorów \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} :

$$(2.33) \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) ;$$

prowadzi dla (2.32) do wyniku:

$$(2.34) \quad \vec{\omega} \cdot (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \dot{\vec{e}}_j \cdot \vec{e}_i .$$

Wielkość $\vec{\omega} \cdot (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_k = \omega_k$ jest rzutem $\vec{\omega}$ na trzecią z osi x_1, x_2, x_3 , wymienionych w porządku cyklicznym. Czyli trzy współrzędne prędkości kątowej $\vec{\omega} (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ w układzie ruchomym są równe:

$$(2.35) \quad \begin{cases} \omega_1 = \dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3 ; \\ \omega_2 = \dot{\vec{e}}_3 \cdot \vec{e}_1 ; \\ \omega_3 = \dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2 . \end{cases}$$

a samą prędkość kątową można wyrazić w postaci:

$$(2.36) \quad \vec{\omega} = \vec{e}_1 (\dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3) + \vec{e}_2 (\dot{\vec{e}}_3 \cdot \vec{e}_1) + \vec{e}_3 (\dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2) .$$

Otrzymane w ten sposób zależności (2.31) oraz prędkość kątowa (2.36) pozwalają na znalezienie $\dot{\vec{e}}_{i'}$ ($i' = 1, 2, 3$) przy znajomości $\vec{\omega}$ lub odwrotnie - znalezienie $\vec{\omega}$ przy danych $\dot{\vec{e}}_{i'}$.

Same wersory \vec{e}_i muszą być znane z założenia, gdyż położenie bryły w każdej chwili (tzn. orientacja osi $x_{i'}$) powinna być dana za pomocą odpowiednich równań ruchu. W konkretnych zagadnieniach równaniami tymi bywają najczęściej funkcje czasu trzech kątów Eulera. Definicje i sens tych kątów można znaleźć w każdej poważniejszej pracy z zakresu mechaniki np. [4] i dlatego ten fragment badania ogólnego ruchu bryły tutaj pominięto.

Na obecnym etapie rozważań jest już możliwe wyprowadzenie wzorów na prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu bryły poruszającej się ruchem ogólnym. W tym celu bierze się pod uwagę wektor wiodący punktu M (rys. 3) zapisany wzorem (2.1) i wyraża się go za pomocą odpowiednich współrzędnych wektorów i wersorów w postaci:

$$(2.37) \quad \vec{r} = \sum_{i=1}^3 x_{\sigma i} \vec{e}_i + \sum_{i'=1}^3 x_{i'} \vec{e}_{i'} , \quad (i, i' = 1, 2, 3) ,$$

a następnie różniczkuje się go względem czasu. Zważywszy, że od czasu zależą współrzędne wektora początku układu ruchomego wyrażone w układzie ruchomym, tzn.

$$x_{\sigma i} = x_{\sigma i} (t) ,$$

oraz wersory układu ruchomego, tzn.

$$\vec{e}_{i'} = \vec{e}_{i'} (t) ,$$

zaś nie zależą od czasu wersory układu stałego \vec{e}_i oraz współrzędne $x_{i'}$ wektora wiodącego punktu M wyrażone w układzie ruchomym - zapowiedziane różniczkowanie wyrazi wzór:

$$(2.38) \quad \dot{\vec{r}} = \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_{\sigma i} \vec{e}_i + \sum_{i'=1}^3 x_{i'} \dot{\vec{e}}_{i'} .$$

Ponieważ \dot{x}_{O_i} są współrzędnymi wektora prędkości początku układu ruchomego, to wobec tego suma:

$$(2.39) \quad \begin{cases} \dot{x}_{O_1} \vec{e}_1 + x_{O_2} \vec{e}_2 + x_{O_3} \vec{e}_3 = \\ = v_{O_1} \vec{e}_1 + v_{O_2} \vec{e}_2 + v_{O_3} \vec{e}_3 = \\ = \vec{v}_O \end{cases}$$

jest wektorem prędkości początku układu.

Następna suma, przy wykorzystaniu wzorów (2.31) może być przekształcona jak niżej:

$$(2.40) \quad \begin{cases} x_1 \dot{\vec{e}}_1 = x_1 \dot{\vec{e}}_1 + x_2 \dot{\vec{e}}_2 + x_3 \dot{\vec{e}}_3 = \\ = x_1 \vec{\omega} \times \vec{e}_1 + x_2 \vec{\omega} \times \vec{e}_2 + x_3 \vec{\omega} \times \vec{e}_3 = \\ = \vec{\omega} \times (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) = \\ = \vec{\omega} \times \vec{r}' \end{cases}$$

gdź ostatni nawias zgodnie z (2.8) jest wektorem \vec{r}' .

Łącząc (2.38), (2.39) i (2.40) otrzymuje się znany wzór na prędkość punktów bryły w ruchu ogólnym:

$$(2.41) \quad \vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Wzór na przyspieszenie wyniknie z różniczkowania względem czasu wzoru (2.41):

$$(2.42) \quad \vec{w} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

gdzie \vec{w} jest wektorem przyspieszenia punktu M. Jest jasne, że $\dot{\vec{v}}_O$ będzie wektorem przyspieszenia początku układu ruchomego - oznacza się go przez \vec{w}_O . Ponadto wprowadza się definicję:

$$(2.43) \quad \vec{\eta} = \dot{\vec{\omega}}$$

gdzie $\vec{\eta}$ jest wektorem przyspieszenia kąowego bryły. W ten sposób wzór (2.42) daje się zapisać następująco:

$$(2.44) \quad \vec{w} = \vec{w}_O + \vec{\eta} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

Wyrażenie:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}'$$

przekształca się - przy wykorzystaniu wzorów (2.31) - następująco:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' &= \vec{\omega} \times (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) = \\ &= \vec{\omega} \times (x_1 \dot{\vec{e}}_1 + x_2 \dot{\vec{e}}_2 + x_3 \dot{\vec{e}}_3) = \\ &= \vec{\omega} \times (x_1 \vec{\omega} \times \vec{e}_1 + x_2 \vec{\omega} \times \vec{e}_2 + x_3 \vec{\omega} \times \vec{e}_3) = \\ &= \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3)] , \end{aligned}$$

co dalej, w oparciu o (2.8) , można zapisać:

$$(2.45) \quad \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') .$$

Przez wstawienie (2.45) do (2.44) wzór na przyspieszenie przyjmuje ostateczną postać:

$$(2.46) \quad \vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{\eta} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') .$$

3. Krytyczna ocena badania ogólnego ruchu bryły w dotychczasowym ujęciu

Rozważania poprzedniego paragrafu można podsumować przedstawiając kolejność postępowania przy obliczaniu prędkości i przyspieszenie dowolnych punktów bryły poruszającej się ruchem ogólnym.

Ujmuje się to w zadania:

- wyrazić ruch bryły za pomocą równań

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t) \text{ oraz } \vec{e}_i = \vec{e}_i(t) ,$$

- obliczyć $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0$ oraz $\vec{w}_0 = \dot{\vec{r}}_0$,

- obliczyć $\dot{\vec{e}}_i$,

- obliczyć $\vec{\omega} = \vec{e}_1 (\dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3) + \vec{e}_2 (\dot{\vec{e}}_3 \cdot \vec{e}_1) + \vec{e}_3 (\dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2) ,$

- obliczyć $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' ,$

- obliczyć $\vec{\eta} = \dot{\vec{\omega}} ,$

- obliczyć $\vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{\eta} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') .$

Przedstawione w paragrafie 2. badanie ruchu ogólnego bryły

jest oparte na pracach [1] , [2] , [3] i [4] , przy czym sposób podejścia jest najbardziej zbliżony do zaprezentowanego w pozycji 2 . Przy identyczności zapisu i końcowych wzorów opracowania przedstawione w tym artykule i w pracy [2] różnią się, gdyż tutaj pokazano cały wywód zagadnienia bez żadnych uproszczeń i skrótów.

Jest widoczne, że kompletny wywód jest wyjątkowo nieprzejrzyście. Wyprowadzenie wzorów transformacyjnych dla współrzędnych wektorów w różnych układach współrzędnych, tzn. wzorów (2.10) i (2.12) jest dość długie. Zależności między cosinusami kierunkowymi osi, wyrażone związkami (2.6) i (2.7) , wobec obszerności zapisu są trudne do spamiętania. Nie jest jasne znaczenie wprowadzonych w (2.17) i (2.18) nieoznaczonych mnożników λ_{ij} , gdzie pojawiają się one jako czynniki pewnych liniowych form wektorowych. Powiązany z tymi mnożnikami wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ jest skutkiem tego wprowadzony sztucznie jako pewien twór matematyczny i nie jest jasny jego sens w powiązaniu z mechaniką. Wyprowadzenie kluczowych dla zagadnienia pochodnych czasowych wersorów \vec{e}_i ma charakter czysto matematyczny i trzeba przyznać, że wyprowadzenie to jest długie i nieprzejrzyście. Przytoczone względy sprawiają, że cały temat jest trudny i jest uciążliwa interpretacja fizyczna zarówno samego zagadnienia, jak i otrzymanych z rozważań wzorów.

4. Propozycje dotyczące odmiennego ujęcia zagadnienia ogólnego ruchu bryły

Zgodnie z zapowiedzią zawartą we wstępie celem pracy jest przedstawienie odmiennego i, zdaniem autorów, prostszego ujęcia zagadnienia ogólnego ruchu bryły.

Rozpoczyna się jak zwykle od badania wzajemnych kątowych położań dwóch układów współrzędnych. W tym celu wektor wodzący punktu "M" wg rys. 2 zapisuje się równanie w obu układach współrzęd-

nych, tzn.

$$(4.1) \quad \vec{r} = \vec{r}'$$

Przy wykorzystaniu konwencji sumacyjnej wektory (4.1) można zapisać następująco:

$$(4.2) \quad x_j \vec{e}_j = x_{j'} \vec{e}_{j'} \quad (j, j' = 1, 2, 3)$$

Mnożąc obie strony zależności (4.2) skalarowo przez \vec{e}_i i zważywszy, że iloczyn skalarowy dwóch wektorów należących do różnych układów współrzędnych jest równy cosinusowi kąta między odpowiednimi osiami, a iloczyn wektorów należących do tego samego układu jest równy symbolowi Kroneckera, ponadto biorąc pod uwagę zwięzające działanie tegoż symbolu, otrzymuje się po wykonaniu wskazanego mnożenia pierwszy wzór transformacyjny w postaci:

$$(4.3) \quad x_i = \alpha_{ij'} x_{j'} \quad (i, j' = 1, 2, 3),$$

co w zwartej postaci jest równoważne (2.10).

Podobnie, mnożąc obustronnie skalarowo (4.2) przez $\vec{e}_{i'}$ otrzymuje się drugie prawo transformacji:

$$(4.4) \quad x_{i'} = \alpha_{ij} x_j \quad (i', j = 1, 2, 3)$$

równoważne prawu (2.12).

Wzory transformacyjne dla wektorów muszą być identyczne, jak dla odpowiednich współrzędnych wektora i stąd odpowiednio do (4.3) można napisać:

$$(4.5) \quad \vec{e}_i = \alpha_{ij'} \vec{e}_{j'} \quad (i, j' = 1, 2, 3),$$

a stosowanie do (4.4) można napisać:

$$(4.6) \quad \vec{e}_{i'} = \alpha_{ij} \vec{e}_j \quad (i', j = 1, 2, 3).$$

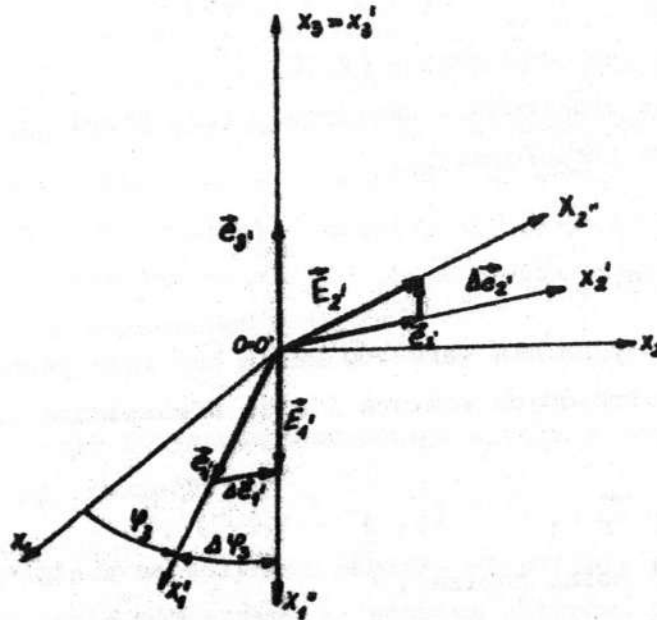
Zależności między cosinusami kątów zawartych w tablicy 1. szuka się następująco. Prawo transformacji wektorów (4.5) mnoży się obustronnie skalarowo przez wektory układu stałego \vec{e}_k , co w wyniku daje:

$$(4.7) \quad \alpha_{ij} \alpha_{ik} = \delta_{jk} \quad (i, k, j' = 1, 2, 3).$$

Dziewięć zależności (4.7), pośród których sześć jest niezależnych a trzy są tożsamościowo równe trzem spośród niezależnych, są w zwartej formie równoważne sześciu związkom (2.6) i (2.7) i jak tamte wyrażają związki między cosinusami kierunkowymi zawartymi w tabelicy 1.

Przechodząc do kinematyki bryły w pierwszej kolejności rozpatruje się zagadnienia pomocnicze, tutaj nazwane kinematycznym obrotem układu współrzędnych.

Na początek zakłada się, że ruchomy układ współrzędnych x_i obraca się wokół osi x_3 układu stałego, przy czym oś x_3 pokrywa się cały czas z osią x_3' (rys. 4). Ropatrywanie ruchu samego



Rys. 4. Wyobrażenie kinematycznego obrotu układu współrzędnych układu współrzędnych zamiast ruchu bryły uzasadnia się tym przekonaniem o sztywnym związaniu bryły z układem ruchomym, a zatem

wszelkie związki formułowane dla punktów bryły są jednakowo słuszne i dla punktów, których położenie jest opisywane w ruchomym układzie x_i , przy czym rozpartywanie ruchu samego układu upraszcza obserwację zmian parametrów kinematycznych charakteryzujących ruch.

Nawiązując do rozpatrywanego obrotu zakłada się, że w pewnej chwili czasu "t" układ ruchomy zajął położenie, jak na rys. 4, jest ono w zupełności określone kątem obrotu osi x_1 (i osi x_2) od położenia początkowego $x_1 = x_1$ (oraz $x_2 = x_2$). Kąt ten, oznaczony przez φ_3 , jest funkcją czasu, tzn.

$$(4.8) \quad \varphi_3 = \varphi_3(t) .$$

W opisanym położeniu wersory \vec{e}_i są skierowane tak, jak przedstawiono na rys. 4. W chwili czasu $t + \Delta t$ osie x_1 i x_2 obróciły się o kąt $\Delta\varphi_3$, a wersory \vec{e}_1 i \vec{e}_2 przeszły odpowiednio w wersory \vec{E}_1 i \vec{E}_2 doznając przy tym przyrostów $\Delta\vec{e}_1$ i $\Delta\vec{e}_2$. Tworzymy granicę:

$$(4.9) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{e}_1}{\Delta t} = \dot{\vec{e}}_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{e}_1}{\Delta\varphi_3} \cdot \frac{\Delta\varphi_3}{\Delta t} .$$

Jest widoczne, że wektor

$$\frac{\Delta\vec{e}_1}{\Delta\varphi_3}$$

ma kierunek wersora \vec{e}_2 , a moduł równy 1, gdyż

$$|\Delta\vec{e}_1| \approx \Delta\varphi_3$$

jeśli uważać, że zarówno φ_3 jak i $\Delta\varphi_3$ są wyrażane w mierze łukowej.

Granica:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_3}{\Delta t} = \omega_3,$$

jest pochodną kąta obrotu względem czasu, definiuje się ją jako moduł wektora prędkości obrotu $\vec{\omega}_3$, przy czym wektor $\vec{\omega}_3$ leży na osi obrotu, tzn.:

$$(4.10) \quad \vec{\omega}_3 = \omega_3 \vec{e}_3$$

Zamiast (4.9) można teraz napisać :

$$(4.11) \quad \dot{\vec{e}}_1 = \omega_3 \vec{e}_2$$

Przy wykorzystaniu zapisu (4.10) wzór (4.11) przyjmuje postać:

$$(4.12) \quad \dot{\vec{e}}_1 = \vec{\omega}_3 \times \vec{e}_1$$

Przy obliczaniu pochodnej wersora \vec{e}_2 :

$$\dot{\vec{e}}_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}_2}{\Delta \varphi_3} \cdot \frac{\Delta \varphi_3}{\Delta t}$$

wystarczy zauważyć, że wektor:

$$\left| \frac{\Delta \vec{e}_2}{\Delta \varphi_3} \right| = 1$$

ma moduł równy 1, a zwrot przeciwny do wersora \vec{e}_1 . Tak więc:

$$(4.13) \quad \dot{\vec{e}}_2 = -\omega_3 \vec{e}_1$$

lub po wykorzystaniu (4.10),

$$(4.14) \quad \dot{\vec{e}}_2 = \omega_3 \vec{e}_2$$

Wiadomo, że pochodna wersora \vec{e}_3 jest równa zero, gdyż wersor ten podczas ruchu nie zmienia kierunku. Warunek zerowania się tej pochodnej jest spełniony, jeśli napisać:

$$(4.15) \quad \dot{\vec{e}}_3 = \omega_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$$

Łączny zapis (4.12), (4.14) i (4.15) doprowadza do wzoru:

$$(4.16) \quad \dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{e}_i \quad (\text{dla } i = 1, 2, 3)$$

Dalej zakłada się, że równocześnie z obrotem wokół osi x_3 układ wykonuje obroty wokół osi x_1 oraz x_2 . Przy obrocie wokół osi x_1 pochodne wersorów będą równe:

$$(4.17) \quad \dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega}_1 \times \vec{e}_i$$

a przy obrocie wokół osi x_2 ,

$$(4.17) \quad \dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega}_2 \times \vec{e}_i$$

Całkowite pochodne czasowe wersorów przy równoczesnym obrocie

wokół trzech osi układu stałego będą oczywiście sumami:

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \dot{\vec{e}}_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \dot{\vec{e}}_i(\omega_1) + \dot{\vec{e}}_i(\omega_2) + \dot{\vec{e}}_i(\omega_3) = \\ &= \vec{\omega}_1 \times \vec{e}_i + \vec{\omega}_2 \times \vec{e}_i + \vec{\omega}_3 \times \vec{e}_i = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{e}_i \end{aligned}$$

Suma:

$$\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 = \vec{\omega}$$

jest wektorem prędkości kątowej ogólnego obrotu układu x_i .

Ostatecznie więc otrzymuje się:

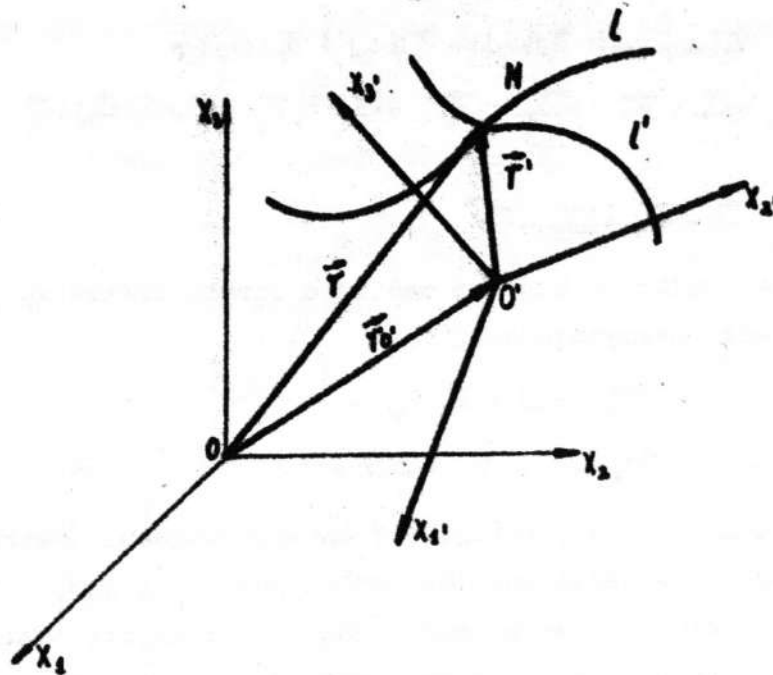
$$(4.19) \quad \dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \times \vec{e}_i,$$

czyli wynik jak (2.31).

Dalszy tok rozważań, polegający na wyprowadzeniu wzorów na prędkość i przyspieszenie punktów bryły, jest taki sam, jak poprzednio, choć stosując umowę sumacyjną upraszcza się zapis wzorów. Przy badaniu bowiem bryły związanej z układem ruchomym wzory (4.19) pozostają takie same, gdyż jak widać z ich budowy, opisują one w końcu i tak ruch układu ruchomego (wersory \vec{e}_i) względem stałego, a nie samej bryły.

Zamiast powtarzać więc wyprowadzenia odpowiednich wzorów, pokazano dalej, że przedstawiony tutaj sposób badania ogólnego ruchu bryły może być z powodzeniem wykorzystany do badania złożonego ruchu punktu. Przypuśćmy mianowicie, że rozważając kinematyczny obrót układu współrzędnych znaleziono wzory (4.19) na pochodne czasowe wersorów układu ruchomego. Załóżmy dalej, że w układzie ruchomym punkt M nie jest z nim sztywno związany, lecz wykonuje w tymże układzie ruch po torze „1” (rys. 5). Ruch ten nazywa się ruchem względnym. Ten sam ruch odniesiony do układu nieruchomego, realizowany po torze „1”, nazywa się ruchem bezwzględnym. Ruch układu ruchomego względem nieruchomego jest unoszenia.

Wektor wodzący punktu „M”, jak widać z rysunku 5., zapisuje się tak samo, jak przy ruchu ogólnym bryły, tzn. wyraża się wzorem



Rys. 5. Ilustracja złożonego ruchu punktu

(2.37) , przy czym z racji odmienności zapisu i dla jasności wywo-
du przepisano go tutaj jeszcze raz:

$$(4.20) \quad \vec{r} = x_{O1} \vec{e}_1 + x_{11} \vec{e}'_1$$

W odróżnieniu od ustaleń poprzednich, współrzędne położenia
punktu w układzie ruchomym $x_{i'}$ są teraz funkcjami czasu, tzn.:

$$(4.21) \quad x_{i'} = x_{i'}(t)$$

czyli w kinematycznym równaniu ruchu (4.20) od czasu zależą współ-
rzędne $x_{O1} = x_{O1}(t)$, współrzędne (4.21) oraz wersory $\vec{e}'_i = \vec{e}'_i(t)$.
Mając powyższe na uwadze różniczkuje się wektor (4.20) w celu zna-
lezenia prędkości punktu M :

$$(4.22) \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \dot{x}_{O1} \vec{e}_1 + \dot{x}_{i'} \vec{e}'_i + x_{i'} \dot{\vec{e}}'_i$$

Poprzednio okazano, że

$$(4.23) \quad \dot{x}_{0i} \vec{e}_i = \vec{v}_0$$

jest wektorem prędkości początku układu ruchomego. Dalej - $\dot{x}_{i'}$ są współrzędnymi wektora prędkości względnej \vec{v}_w , tzn.:

$$(4.24) \quad \vec{v}_w = \dot{x}_{i'} \vec{e}_{i'} ; \quad \dot{x}_{i'} = v_{wi'}$$

wyrażonego w układzie ruchomym.

Wykorzystując w (4.22) wzory (4.23), (4.24) i (4.19) otrzymuje się:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_w + x_{i'} \vec{\omega} \times \vec{e}_{i'} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (x_{i'} \vec{e}_{i'}) + \vec{v}_w$$

Ostatecznie więc:

$$(4.25) \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}_w$$

Różniczkując względem czasu wzór (4.25) otrzymuje się wzór na przyspieszenie bezwzględne:

$$(4.26) \quad \vec{w} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (x_{i'} \vec{e}_{i'}) + (\dot{x}_{i'} \vec{e}_{i'}) + \dot{\vec{v}}_w$$

Dalsze przekształcenie prowadzi do wyniku:

$$(4.27) \quad \begin{aligned} \vec{w} &= \vec{w}_0 + \vec{\eta} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\dot{x}_{i'} \vec{e}_{i'}) + \vec{\omega} \times (x_{i'} \dot{\vec{e}}_{i'}) + \ddot{x}_{i'} \vec{e}_{i'} + \dot{x}_{i'} \dot{\vec{e}}_{i'} = \\ &= \vec{w}_0 + \vec{\eta} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}_w + \vec{\omega} \times [x_{i'} (\vec{\omega} \times \vec{e}_{i'})] + w_{wi'} \vec{e}_{i'} + v_{wi'} \dot{\vec{e}}_{i'} = \\ &= \vec{w}_0 + \vec{\eta} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}_w + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (x_{i'} \vec{e}_{i'})] + \vec{w}_w + \vec{\omega} \times (v_{wi'} \vec{e}_{i'}) \end{aligned}$$

Końcowy wzór na przyspieszenie bezwzględne punktu M ma więc postać:

$$(4.28) \quad \vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{\eta} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{w}_w + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_w,$$

gdzie oznaczono:

$$(4.29) \quad \vec{w}_w = w_{wi'} \vec{e}_{i'} \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = v_{wi'} \vec{e}_{i'} \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \dot{x}_{i'} \vec{e}_{i'}$$

jako wektor przyspieszenia względnego punktu, iloczyn:

$$(4.30) \quad \vec{w}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_w$$

jest przyspieszeniem Coriolisa.

Wyprowadzenie wzorów (4.25) i (4.28) na prędkość i przyspie-

szenie punktu poruszającego się ruchem złożonym wskazuje na to, że elementy proponowanego w pracy opisu ruchu ogólnego bryły mogą znaleźć zastosowanie również i w tym przypadku.

5. Wnioski końcowe

Przedstawione w pracy dwa sposoby potraktowania zagadnienia ogólnego ruchu bryły w praktyce dydaktycznej pozwalają na dokonanie pewnych porównań i wyciągnięcie wniosków.

Wydaje się, że pierwszy z tych sposobów, stosowany zazwyczaj w nauczaniu mechaniki, jest trudniejszy, na co składa się kilka przyczyn, a mianowicie: rozważania są długie, co sprawia, że główne cele tych rozważań ulegają zamazaniu i dopiero przy dobrej znajomości tematu jest widoczna celowość kolejnych przekształceń. Należy jednak zdawać sobie sprawę z faktu, że w temat jest wprowadzany student, który zagadnienia nie zna. Stosowany zapis jest długi i utrudnia zapamiętanie najważniejszych fragmentów. Charakteryzujące ruch parametry kinematyczne - w szczególności wektor prędkości kątowej - są wprowadzane dosyć sztucznie i pojawiają się w wywodzie jako efekty pewnych przekształceń matematycznych, co z kolei utrudnia nadanie im odpowiedniego sensu fizycznego.

Jeśli chodzi o zaproponowany przez autorów drugi sposób podejścia do zagadnienia, to wydaje się, że w porównaniu z pierwszym ma on kilka zalet. Przede wszystkim same rozważania są krótsze, co głównie osiągnięto dzięki konsekwentnemu zastosowaniu w zapisie konwencji sumacyjnej. Skrócenie przekształceń pozwala na większą koncentrację uwagi studenta na momentach istotnie ważnych bez rozpraszenia uwagi długimi przekształczeniami. Wektor prędkości kątowej w proponowanym sposobie pochodzi z interpretacji fizycznej i pojawia się w sposób bardziej naturalny. Całość zagadnienia wydaje się więc bardziej zwarta, a stopień interpretacji mechanicznej

zagadnienia, pełniejszy. Wskazano ponadto na możliwość wykorzystania pewnego zagadnienia częściowego - nazwanego w pracy kinematycznym obrotem układu współrzędnych - również do badania złożonego ruchu punktu.

Uważamy, że proponowane ujęcie zagadnienia może być wykorzystane efektywnie w dydaktyce mechaniki.

6. Literatura

- [1]. Haar D.T., Elements of Hamiltonian Mechanics, North - Holland, Amsterdam, 1964
- [2]. Łunc M., Szaniawski A., Zarys mechaniki ogólnej, Warszawa, 1959
- [3]. Лurie A.U., Аналитическая механика, Москва, 1961
- [4]. Whittaker E.T., A Treatise on the analytical Dynamics, Cambridge, 1952.

Streszczenie

W pracy zaproponowano inny od dotychczas stosowanego w dydaktyce mechaniki sposób ujęcia zagadnienia ogólnego ruchu bryły. Droga porównań pokazano, że sposób ten ma kilka zalet, jak skrócenie zapisu, zwiększenie przejrzystości wywodów oraz wprowadzenie parametrów kinematycznych rozpatrywanego ruchu jako konsekwencji pewnych interpretacji fizycznych. Wskazano na możliwość wykorzystania proponowanego sposobu również przy badaniu złożonego ruchu punktu. Wyniki pracy mogą znaleźć zastosowanie w dydaktyce mechaniki.