

ARNOLD WILCZYŃSKI
WSP w Bydgoszczy

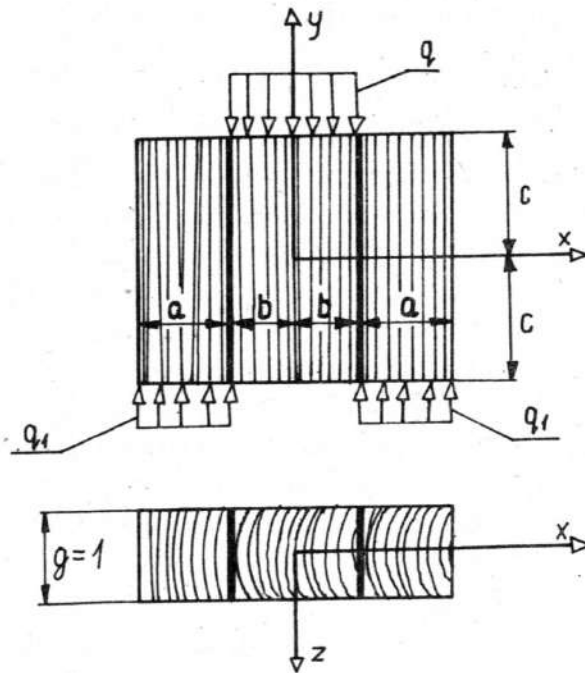
WPLYW SZEROKOŚCI SKLEJANYCH ELEMENTÓW NA NAPRĘŻENIA W SPOINIE
KLEJOWEJ SOSNOWEJ PRÓBKIE BLOKOWEJ DWUCIĘTEJ

1. Wstęp

Szerokie zastosowanie drewna na odpowiedzialne elementy konstrukcyjne przy jednoczesnej dążności do optymalizacji konstrukcji zmusza do doskonalenia obliczeń wytrzymałościowych tych elementów. W tym celu elementarne wzory wytrzymałości materiałów należy w niektórych przypadkach zastępować dokładniejszymi związkami wynikającymi z równań teorii sprężystości i to teorii sprężystości ciała anizotropowego, jako że drewno jest materiałem o silnej anizotropii swych właściwości sprężystych.

Jednym z istotnych problemów wytrzymałościowych w konstrukcjach drewnianych jest problem rozkładu naprężeń ścinających w spoinie klejowej będącej częścią tak często stosowanych w tych konstrukcjach połączeń klejowych. Naprężenia te odgrywają z reguły decydującą rolę w przenoszeniu obciążeń przez połączenie klejowe. Najkorzystniejszy z wytrzymałościowego punktu widzenia byłby równomierny rozkład tych naprężeń w płaszczyźnie spoiny. Praktycznie jest to jednak nieosiągalne, w związku z czym należy dążyć do tego, aby rozkład ten był jak najbardziej zbliżony do równomiernego. Wartości naprężeń w spoinie, jak i ich rozkład zależą od szeregu czynników. Jednym z nich jest geometria złącza, tzn. kształt i wymiary łączonych elementów. Wpływowi tego właśnie czynnika poświęcona jest niniejsza praca.

Rozpatruje się w niej tarczę drewnianą typu próbka blokowa dwu cięta, przedstawioną na rys.1. Tarcza ta sklejona jest z trzech części - środkowej o szerokości $2b$ i bocznych o szerokości a . Obciążona jest siłami ściskającymi rozłożonymi w sposób ciągły pokazany na rys. 1. Celem rozważań, w których wykorzystuje się teorię



Rys. 1. Tarcza drewniana sklejona z trzech części

sprężystości ciała anizotropowego, jest określenie wpływu zmiany szerokości a w stosunku do szerokości b na rozkład naprężeń w spoinie klejowej. Szczegóły problemu zostaną przedstawione w p.2.

Istniejące opracowania [1, 2, 4, 5, 12, 14] z zakresu analizy naprężeń w spoinie klejowej dotyczą połączeń sklejanych z ciał izotropowych, przy czym rozważano przede wszystkim złącze zakładkowe poddane rozciąganiu. Wyjątek dotyczy połączeń klejowych elementów drewnianych stanowią prace Niskanena [9, 10]. W pierwszej z nich autor wyznaczył rozkłady naprężeń ścinających w spoinie klejowej próbki blokowej dwuciętej wykonanej z drewna brzozy fińskiej. Kształt i obciążenie próbki odpowiadają rozpatrywanej przez nas tarczy, z tym że czynnikiem zmiennym jest wysokość $2c$ tarczy, podczas gdy stosunek $a/2b$ szerokości sklejonych elementów pozostaje stały.

2. Założenia

Przyjęto następujące założenia dotyczące sposobu wykonania tarczy, właściwości sprężystych drewna, obciążenia oraz spoiny klejowej:

1. Tarcza składa się z elementów sosnowych o tych samych właściwościach fizyko-mechanicznych,
2. Elementy te sklejone są równoległowiątkiście płaszczyznami stycznymi,
3. Drewno, z którego jest wykonana tarcza, jest materiałem sprężystym podlegającym prawu Hooke'a,
4. Drewno to jest materiałem ortotropowym, w którym główne kierunki sprężystości są wyznaczone przez kierunki anatomiczne drewna,
5. Moduły sprężystości odpowiadające poszczególnym kierunkom anatomicznym drewna mają takie same wartości przy ściskaniu i przy rozciąganiu,
6. Obciążenie tarczy ma charakter statyczny,
7. Wartość tego obciążenia jest dostatecznie mała, tak że największe naprężenia w tarczy nie przekraczają granicy proporcjonalności,
8. Spoina klejowa jest bardzo cienka i nie wpływa na odkształcenia i naprężenia w tarczy.

Z rys. 1 oraz z założenia 2 wynika, że osie x , y , Z odpowiadają kierunkom anatomicznym drewna, przy czym oś x pokrywa się z kierunkiem promieniowym, y - wzdłużnym a Z - stycznym. Zgodnie z założeniem 4 są to zarazem główne kierunki sprężystości.

Wybór drewna sosnowego jako materiału tarczy wynika z faktu, że jest to podstawowy surowiec drzewny stosowany w Polsce na konstrukcje drewniane.

Założenie 8 wydaje się być uzasadnione. Grubość spoiny klejowej w przypadku sklejania drewna, i to spoiny rozumianej jako układ warstwowy składający się z warstwy zestalonego kleju i warstw drewna przesyconego klejem, jest bardzo mała w porównaniu z wymiarami sklejanych elementów. W tej sytuacji spoina klejowa nie może wpływać, przynajmniej w istotny sposób, na odkształcalność złącza, a w efekcie na stan naprężeń w tarczy. W konsekwencji założenia 8 tarcza może być traktowana jako jednolita tarcza drewniana. Warto zaznaczyć, że pod-

bnie do tego założenia podchodzą Goland i Reissner [5] oraz Niskanen [9] .

Jak już zaznaczono w p.1, celem pracy jest wyznaczenie naprężeń w spoinie klejowej dla tarcz o różnych szerokościach elementów bocznych, a więc o różnych proporcjach a/b . Pozostałe wymiary tarczy są stałe. Przyjęto, że jej wysokość $2c$ jest dwukrotnie większa od szerokości $2b$ elementu środkowego ($c/b = 2$), a jej grubość q jest równa jedności.

Dla porównania postanowiono też wyznaczyć naprężenia w spoinie klejowej przy założeniu, że tarcza wykonana jest z materiału izotropowego.

3. Składowe naprężenia w tarczy

W związku z tym, że w naszym zagadnieniu mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia, związki między odkształceniami i naprężeniami obowiązujące dla ciała ortotropowego [6, 8, 15] można sprowadzić do postaci

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

przy czym występująca tu macierz kwadratowa jest macierzą symetryczną, z czego wynika zależność

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \quad (2)$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \chi_{xy}$ są składowymi odkształcenia, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ - składowymi naprężeniami w tarczy, $E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{yx}, G_{xy}$ - stałymi sprężystości drewna. Stałe te są określone następująco: E_x i E_y - moduły sprężystości przy rozciąganiu w kierunkach x i y , ν_{xy}, ν_{yx} - współczynniki Poissona wiążące odpowiednio odkształcenia w kierunkach x i y , G_{xy} - moduł ścinania odpowiadający odkształceniu postaciowemu w płaszczyźnie xy .

W celu wyznaczenia składowych naprężenia posłużymy się funkcją naprężeń Airy'ego, czyli funkcją Φ spełniającą związki [13]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

Dla ciała ortotropowego, przy pominięciu sił masowych, funkcja ta musi spełniać ponadto następujące równanie różniczkowe [8]

$$\frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - 2 \frac{\nu_{yx}}{E_y} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (4)$$

Przyjęto funkcję Φ jako sumę trzech funkcji składowych

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3, \quad (5)$$

z których pierwsza ma postać szeregu

$$\Phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos \frac{n\pi x}{a+b}, \quad (6)$$

druga jest zależna tylko od zmiennej x

$$\Phi_2 = -\frac{q b^2}{2(\alpha+b)} x^2, \quad (7)$$

a trzecia tylko od zmiennej y

$$\Phi_3 = \frac{1}{6} E y^3 + \frac{1}{2} F y^2, \quad (8)$$

przy czym E i F są stałymi.

Wstawienie założonej funkcji Φ do równania (4) pozwala określić postać funkcji $f_n(y)$. Otrzymujemy dla niej równanie różniczkowe

$$\frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 f_n}{\partial y^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{yx}}{E_y} \right) \left(\frac{n\pi}{a+b} \right)^2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} + \frac{1}{E_y} \left(\frac{n\pi}{a+b} \right)^4 f_n = 0, \quad (9)$$

któremu po podstawieniu

$$f_n(y) = \exp r \frac{n\pi}{a+b} y \quad (10)$$

odpowiada równanie charakterystyczne

$$r^4 - \left(\frac{E_x}{G_{xy}} - 2\nu_{yx} \frac{E_x}{E_y} \right) r^2 - \frac{E_x}{E_y} = 0 \quad (11)$$

Przyjmując za Horigiem i Stamerem [7]

$$E_x = 1120 \text{ MPa}, \quad E_y = 16600 \text{ MPa}, \quad G_{xy} = 1780 \text{ MPa},$$

$\nu_{yx} = 0,465$, które to wartości dotyczą drewna sosnowego o gęstości $0,54 \text{ g/cm}^3$ i wilgotności 9,7 %, otrzymujemy na podstawie równania (10)

$$r_1 = 0,62960, \quad r_2 = -0,62960, \quad r_3 = 0,41244, \quad r_4 = -0,41244.$$

Wobec tego, że są to cztery różne pierwiastki rzeczywiste, przy czym $r_2 = -r_1$, $r_4 = -r_3$, poszukiwana funkcja $f_n(y)$ może być przedstawiona w postaci

$$f_n(y) = A_n \sinh \alpha_n r_1 y + B_n \cosh \alpha_n r_1 y + C_n \sinh \alpha_n r_3 y + D_n \cosh \alpha_n r_3 y. \quad (12)$$

Współczynnik α_n występujący w powyższym wzorze jest przy tym równy

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a+b} \quad (13)$$

a A_n , B_n , C_n , D_n są stałymi, które należy wyznaczyć na podstawie warunków brzegowych zagadnienia.

Możemy obecnie, wychodząc ze związków (3) i uwzględniając zależności (5), (6), (7), (8), (12) i (13), przedstawić wzory na składowe naprężenia w tarczy

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \alpha_n^2 r_1^2 \sinh \alpha_n r_1 y + B_n \alpha_n^2 r_1^2 \cosh \alpha_n r_1 y + C_n \alpha_n^2 r_3^2 \sinh \alpha_n r_3 y + D_n \alpha_n^2 r_3^2 \cosh \alpha_n r_3 y \right) \cos \alpha_n x + E y + F, \quad (14)$$

$$\sigma_y = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \alpha_n^2 \sinh \alpha_n r_1 y + B_n \alpha_n^2 \cosh \alpha_n r_1 y + C_n \alpha_n^2 \sinh \alpha_n r_3 y + D_n \alpha_n^2 \cosh \alpha_n r_3 y \right) \cos \alpha_n x - \frac{q b}{a+b}, \quad (15)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \alpha_n^2 r_1 \cosh \alpha_n r_1 y + B_n \alpha_n^2 r_1 \sinh \alpha_n r_1 y + C_n \alpha_n^2 r_3 \cosh \alpha_n r_3 y + D_n \alpha_n^2 r_3 \sinh \alpha_n r_3 y \right) \sin \alpha_n x. \quad (16)$$

4. Warunki brzegowe, funkcje obciążenia tarczy

W celu wyznaczenia stałych A_n, B_n, C_n, D_n $n = 1, 2, \dots$) oraz E, F korzystamy z warunków brzegowych, które dla naszej tarczy mają postać:

- dla górnej krawędzi tarczy, a więc dla $y = +c$

$$\sigma_y = -q(x), \quad \tau_{xy} = 0, \quad (17)$$

- dla dolnej krawędzi tarczy, a więc dla $y = -c$

$$\sigma_y = -q_1(x), \quad \tau_{xy} = 0, \quad (18)$$

- dla bocznych krawędzi tarczy, tzn. dla $x = \pm (a+b)$

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (19)$$

Drugi z warunków (19) jest przy tym spełniony automatycznie ze względu na przyjęte postacie funkcji Φ_1, Φ_2 i Φ_3 .

Funkcje $q(x)$ i $q_1(x)$ obciążenia tarczy należy przedstawić za pomocą szeregów Fouriera [11, 13]. Ze względu na symetrię obciążenia względem osi $x = 0$ będą to szeregi cosinusowe [3]

$$q(x) = \frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos \alpha_n x, \quad (20)$$

$$q_1(x) = \frac{1}{2} q_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} q_{1n} \cos \alpha_n x, \quad (21)$$

przy czym

$$q_0 = \frac{1}{a+b} \int_{-b}^b q dx, \quad q_n = \frac{1}{a+b} \int_{-b}^b q \cos \alpha_n x dx \quad (22)$$

$$q_{10} = \frac{1}{a+b} \left(\int_{-(a+b)}^{-b} q_1 dx + \int_b^{(a+b)} q_1 dx \right), \quad q_{1n} = \frac{1}{a+b} \left(\int_{-(a+b)}^{-b} q_1 \cos \alpha_n x dx + \int_b^{(a+b)} q_1 \cos \alpha_n x dx \right) \quad (23)$$

Biorąc pod uwagę równomierny rozkład obciążeń o natężeniu q i q_1 (rys.1) oraz uwzględniając związek

$$q_1 = q \frac{b}{a} \quad (24)$$

wynikający z warunków równowagi tarczy, otrzymamy po obliczeniu

współczynników Fouriera za pomocą wzorów (22) i (23) następujące funkcje obciążenia tarczy

$$q(x) = \frac{qb}{a+b} + \frac{2q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \alpha_n b \cos \alpha_n x, \quad (25)$$

$$q_{y_1}(x) = \frac{qb}{a+b} - \frac{2qb}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \alpha_n b \cos \alpha_n x. \quad (26)$$

Uwzględniając powyższe związki oraz równania (15) i (16) w warunkach (17) i (18), możemy obliczyć wartości stałych A_n , B_n , C_n , D_n dla różnych wartości stosunku a/b , przy założonych wartościach q , r_1 , r_3 , c/b . Z kolei, na podstawie pierwszego z warunków (19) możemy wyznaczyć wartości stałych E , F odpowiadające poszczególnym przypadkom rozpatrywanej tarczy, a więc różnym proporcjom a/b . Należy przy tym zauważyć, że warunek ten może być spełniony tylko w sposób przybliżony. Oznaczając przez $\varphi(y_i)$ i $\psi(y_i)$ następujące wyrażenia:

$$\varphi(y_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \alpha_n^2 r_1^2 \sinh \alpha_n r_1 y_i + B_n \alpha_n^2 r_1^2 \cosh \alpha_n r_1 y_i + C_n \alpha_n^2 r_3^2 \sinh \alpha_n r_3 y_i + D_n \alpha_n^2 r_3^2 \cosh \alpha_n r_3 y_i \right) \cos n\pi, \quad (27)$$

$$\psi(y_i) = - (E y_i + F) \quad (28)$$

otrzymamy na podstawie zależności (14) następujący wzór określający wartości naprężenia σ_x w punktach $y=y_i$ pionowych krawędzi tarczy

$$\left(\sigma_x \right)_{\substack{x = \pm (a+b) \\ y = y_i}} = \varphi(y_i) - \psi(y_i). \quad (29)$$

Wartości te powinny być możliwie bliskie zeru, więc funkcja $\psi(y)$ powinna jak najbardziej zbliżać się do funkcji $\varphi(y)$ w rozpatrywanym przedziale $-c \leq y \leq +c$. Stałe E i F we wzorze (28) należy zatem zgodnie z metodą najmniejszych kwadratów tak dobrać, aby suma

$$S = \sum_{i=1}^k \left[\varphi(y_i) - \psi(y_i) \right]^2 \quad (30)$$

osiągała minimum, co ma miejsce wtedy, gdy jej pochodne cząstkowe

względem parametrów i funkcji są równe zero:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial F} = 0. \quad (34)$$

5. Przypadek tarczy izotropowej

Traktując tarczę wykonaną z ciała izotropowego jako szczególny przypadek tarczy ortotropowej, w którym

$$E_x = E_y = E, \quad G_{xy} = G, \quad \nu_{yx} = \nu, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

otrzymamy na podstawie równania (11) następujące równanie charakterystyczne

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0. \quad (32)$$

Równanie to ma dwa pierwiastki rzeczywiste podwójne $r_{1,2} = 1$,

$r_{3,4} = -1$, w związku z czym funkcja $f_n(y)$ przyjmuje tym razem postać

$$f_n(y) = (A_n + C_n y) \sinh \alpha_n y + (B_n + D_n y) \cosh \alpha_n y \quad (33)$$

a składowe naprężenia w tarczy są równe

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n \alpha_n^2 + C_n \alpha_n^2 y + 2D_n \alpha_n) \sinh \alpha_n y + (B_n \alpha_n^2 + 2C_n \alpha_n + D_n \alpha_n^2 y) \cosh \alpha_n y \right] \cos \alpha_n x + E y + F, \quad (34)$$

$$\sigma_y = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n \alpha_n^2 + C_n \alpha_n^2 y) \sinh \alpha_n y + (B_n \alpha_n^2 + D_n \alpha_n^2 y) \cosh \alpha_n y \right] \cos \alpha_n x - \frac{q b}{a+b}, \quad (35)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(B_n \alpha_n^2 + C_n \alpha_n + D_n \alpha_n^2 y) \sinh \alpha_n y + (A_n \alpha_n^2 + C_n \alpha_n^2 y + D_n \alpha_n) \right] \sin \alpha_n x \quad (36)$$

stałe A_n, B_n, C_n, D_n oraz E, F wyznaczamy, podobnie jak dla tarczy ortotropowej, z warunków brzegowych (17), (18) i (19).

6. Wyniki obliczeń i ich analiza

W pierwszym etapie obliczeń wyznaczono wartości stałych A_n, B_n, C_n, D_n, E, F dla poszczególnych przypadków tarczy, w drugim - wartości naprężeń ścinających τ_{xy} i normalnych σ_x w spoinie klejowej, czyli w przekrojach $x = \pm b$ tarczy. Obliczenia te, zgodnie z założeniami pracy, przeprowadzono dla tarcz wykonanych z drewna sosnowego i z materiału izotropowego, przy różnych wartościach współczynnika a/b , przyjmując: $a/b = 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3$. Posłużono się maszyną cyfrową Odra 1305, obliczając stałe A, B, C, D oraz naprężenia z uwzględnieniem $n = 30$ wyrazów szeregów. Tak duża liczba tych wyrazów była konieczna ze względu na słabą zbieżność szeregów występujących we wzorach na naprężenia.

Końcowe wyniki obliczeń, tzn. wartości naprężeń stycznych i normalnych w spoinie klejowej, zestawiono w tab. 1. Ponadto sporządzono wykresy rozkładu tych naprężeń wzdłuż spoiny klejowej dla tarcz o współczynniku a/b równym 0,5; 1; 2; 3; (rys. 2). Zrezygnowano z przedstawienia tych wykresów dla przypadków $a/b = 1,5$ i $2,5$, gdyż różniłyby się one nieznacznie od wykresów dla przypadków $a/b = 2$ i 3 .

Jak wynika z tab. 1 i rys. 2 rozkłady naprężeń τ_{xy} i σ_x w spoinie klejowej zależą od stosunku a/b i różnią się zasadniczo jeśli chodzi o tarczę sosnową i tarczę izotropową. W przypadku tarczy sosnowej o stosunkowo wąskich elementach bocznych ($a/b = 0,5$) maksymalne naprężenie styczne τ_{max} występuje w pobliżu dolnego końca spoiny (dla $y = -0,8c$), natomiast dla tejże tarczy o stosunku $a/b = 1$ - w środku długości spoiny. Przy większych wartościach a/b naprężenie τ_{max} występuje nieco powyżej środka spoiny (przy $y = 0 \div 0,2c$).

Dla tarczy izotropowej maksymalne wartości naprężenia stycznego odpowiadają następującym punktom spoiny klejowej: dla $a/b = 0,5$, $y = -0,9c$; dla $a/b = 1$, $y = \pm 0,9c$; dla $a/b = 1,5 \div 3$, $y = (0,8 \div 0,9)c$.

Tak więc, w odróżnieniu od tarczy sosnowej, w tarczy izotropowej charakteryzującej się wartością proporcji a/b nie mniejszą od jedności największe naprężenia styczne występują w pobliżu górnego końca spoiny.

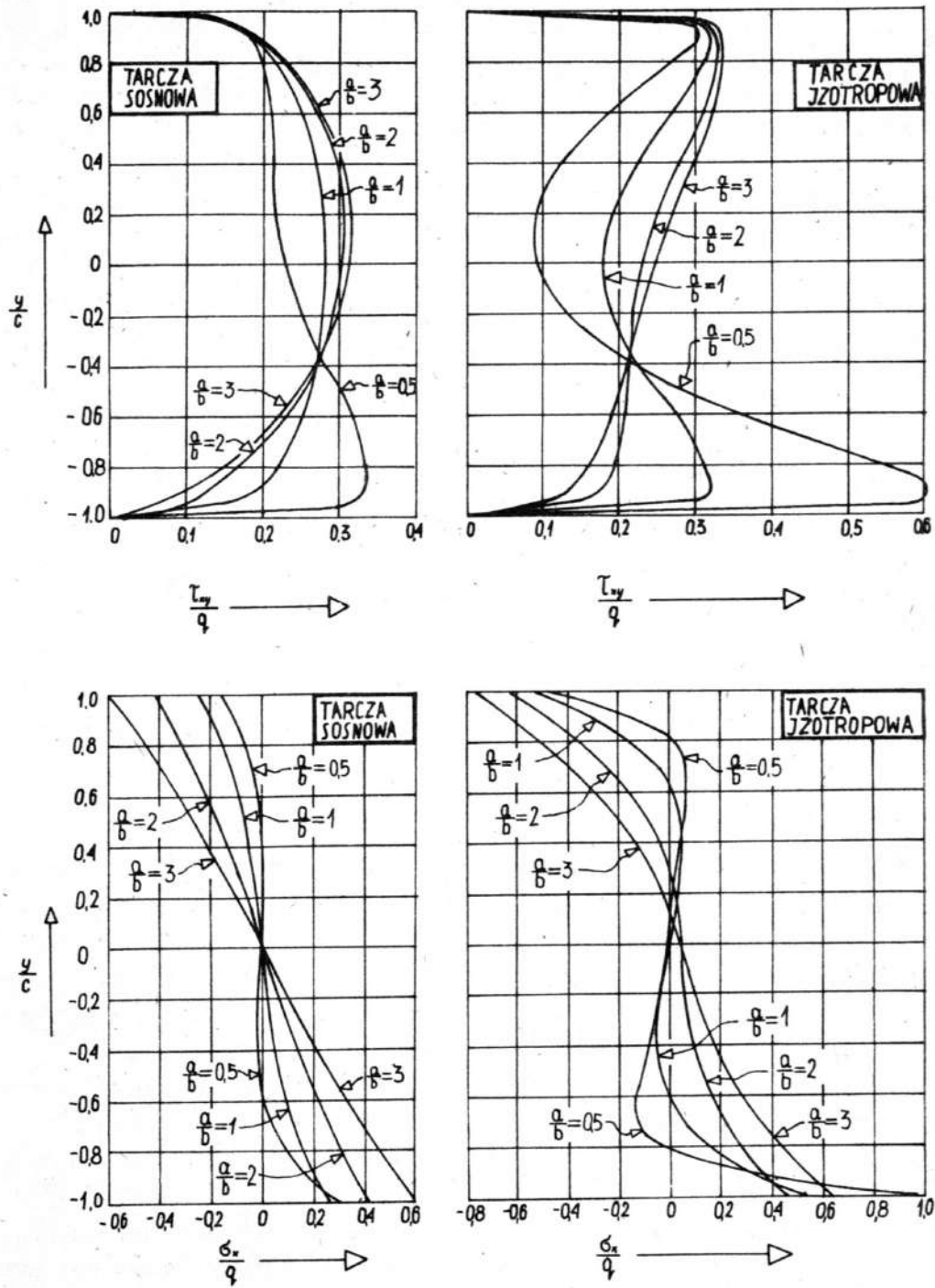
Wartość średnia τ_m naprężeń ścinających w spoinie klejowej, zdefiniowana zgodnie z wzorem

Tabela 1. Wartości naprężeń normalnych i stycznych w spoinie klejowej

$\frac{y}{c}$	$\frac{a}{b} = 0,5$				$\frac{a}{b} = 1$			
	drewno sosnowe		materiał izotropowy		drewno sosnowe		materiał izotropowy	
	$\frac{\tau_{xy}}{q}$	$\frac{\sigma_x}{q}$	$\frac{\tau_{xy}}{q}$	$\frac{\sigma_x}{q}$	$\frac{\tau_{xy}}{q}$	$\frac{\sigma_x}{q}$	$\frac{\tau_{xy}}{q}$	$\frac{\sigma_x}{q}$
1	0,000	- 0,167	0,000	- 0,489	0,000	- 0,253	0,000	- 0,541
0,9	0,185	- 0,111	0,307	- 0,163	0,193	- 0,200	0,321	- 0,328
0,8	0,199	- 0,063	0,274	0,012	0,220	- 0,156	0,313	- 0,164
0,7	0,207	- 0,032	0,231	0,062	0,239	- 0,119	0,295	- 0,050
0,6	0,211	- 0,013	0,188	0,064	0,253	- 0,089	0,273	0,016
0,5	0,212	- 0,005	0,151	0,052	0,264	- 0,065	0,249	0,047
0,4	0,213	- 0,002	0,122	0,037	0,271	- 0,045	0,225	0,056
0,3	0,214	- 0,003	0,102	0,034	0,276	- 0,030	0,205	0,051
0,2	0,217	- 0,005	0,090	0,011	0,279	- 0,019	0,190	0,037
0,1	0,222	- 0,009	0,087	- 0,002	0,280	- 0,009	0,180	0,020
0	0,229	- 0,013	0,093	- 0,014	0,281	0,000	0,177	0,000
-0,1	0,239	- 0,018	0,107	- 0,028	0,280	0,009	0,180	- 0,020
-0,2	0,251	- 0,021	0,132	- 0,044	0,279	0,019	0,190	- 0,037
-0,3	0,266	- 0,024	0,169	- 0,063	0,276	0,030	0,205	- 0,051
-0,4	0,282	- 0,023	0,219	- 0,085	0,271	0,045	0,225	- 0,056
-0,5	0,299	- 0,016	0,283	- 0,110	0,264	0,065	0,249	- 0,047
-0,6	0,315	0,002	0,362	- 0,133	0,253	0,089	0,273	- 0,016
-0,7	0,327	0,035	0,452	- 0,128	0,239	0,119	0,295	0,050
-0,8	0,334	0,093	0,542	- 0,027	0,220	0,156	0,313	0,164
-0,9	0,333	0,178	0,611	0,320	0,193	0,200	0,321	0,328
-1	0,000	0,276	0,000	0,972	0,000	0,253	0,000	0,541

$\frac{y}{c}$	$\frac{a}{b} = 1,5$				$\frac{a}{b} = 2$			
	drewno sosnowe		materiał izotropowy		drewno sosnowe		materiał izotropowy	
	$\frac{\tau_{xy}}{q}$	$\frac{\sigma_x}{q}$	$\frac{\tau_{xy}}{q}$	$\frac{\sigma_x}{q}$	$\frac{\tau_{xy}}{q}$	$\frac{\sigma_x}{q}$	$\frac{\tau_{xy}}{q}$	$\frac{\sigma_x}{q}$
1	0,000	- 0,331	0,000	- 0,567	0,000	- 0,417	0,000	- 0,623
0,9	0,193	- 0,279	0,327	- 0,418	0,192	- 0,360	0,329	- 0,489
0,8	0,226	- 0,232	0,325	- 0,278	0,228	- 0,305	0,331	- 0,361
0,7	0,248	- 0,189	0,316	- 0,165	0,253	- 0,255	0,325	- 0,251
0,6	0,265	- 0,152	0,301	- 0,079	0,271	- 0,210	0,314	- 0,161
0,5	0,278	- 0,119	0,284	- 0,022	0,285	- 0,169	0,299	- 0,092
0,4	0,287	- 0,090	0,266	0,015	0,296	- 0,131	0,284	- 0,040
0,3	0,293	- 0,064	0,249	0,033	0,302	- 0,095	0,268	- 0,005
0,2	0,297	- 0,039	0,234	0,038	0,306	- 0,061	0,254	0,018
0,1	0,298	- 0,018	0,223	0,035	0,307	- 0,030	0,242	0,033
0	0,297	0,003	0,214	0,028	0,304	0,002	0,232	0,042
-0,1	0,293	0,023	0,210	0,020	0,300	0,033	0,224	0,048
-0,2	0,288	0,045	0,209	0,013	0,292	0,065	0,219	0,056
-0,3	0,280	0,067	0,212	0,013	0,282	0,097	0,216	0,067
-0,4	0,269	0,092	0,217	0,022	0,268	0,132	0,214	0,086
-0,5	0,255	0,119	0,223	0,044	0,250	0,169	0,212	0,114
-0,6	0,237	0,151	0,229	0,082	0,229	0,209	0,210	0,154
-0,7	0,214	0,186	0,233	0,140	0,202	0,253	0,206	0,209
-0,8	0,186	0,226	0,233	0,221	0,169	0,302	0,197	0,280
-0,9	0,148	0,273	0,227	0,322	0,126	0,356	0,182	0,368
-1	0,000	0,324	0,000	0,436	0,000	0,414	0,000	0,469

$\frac{y}{c}$	$\frac{a}{b} = 2,5$				$\frac{a}{b} = 3$			
	drewno sosnowe		materiał izotropowy		drewno sosnowe		materiał izotropowy	
	$\frac{\tau_{xy}}{q}$	$\frac{\sigma_x}{q}$	$\frac{\tau_{xy}}{q}$	$\frac{\sigma_x}{q}$	$\frac{\tau_{xy}}{q}$	$\frac{\sigma_x}{q}$	$\frac{\tau_{xy}}{q}$	$\frac{\sigma_x}{q}$
1	0,000	- 0,508	0,000	- 0,689	0,000	- 0,605	0,000	- 0,783
0,9	0,190	- 0,442	0,330	- 0,557	0,186	- 0,525	0,330	- 0,627
0,8	0,230	- 0,379	0,335	- 0,431	0,230	- 0,453	0,337	- 0,500
0,7	0,255	- 0,321	0,331	- 0,322	0,257	- 0,387	0,335	- 0,388
0,6	0,275	- 0,268	0,321	- 0,230	0,277	- 0,324	0,326	- 0,290
0,5	0,290	- 0,217	0,308	- 0,153	0,293	- 0,265	0,314	- 0,208
0,4	0,301	- 0,169	0,294	- 0,092	0,304	- 0,208	0,301	- 0,139
0,3	0,308	- 0,124	0,279	- 0,044	0,311	- 0,154	0,286	- 0,082
0,2	0,311	- 0,082	0,265	- 0,008	0,315	- 0,101	0,272	- 0,035
0,1	0,312	- 0,039	0,252	0,020	0,315	- 0,049	0,259	0,004
0	0,309	0,001	0,241	0,043	0,312	0,001	0,248	0,038
-0,1	0,304	0,042	0,232	0,063	0,306	0,052	0,237	0,071
-0,2	0,295	0,083	0,225	0,083	0,297	0,102	0,228	0,103
-0,3	0,283	0,126	0,218	0,106	0,284	0,155	0,220	0,137
-0,4	0,267	0,171	0,212	0,135	0,267	0,209	0,211	0,176
-0,5	0,248	0,217	0,207	0,171	0,246	0,265	0,203	0,222
-0,6	0,224	0,266	0,200	0,218	0,220	0,324	0,192	0,279
-0,7	0,194	0,320	0,190	0,277	0,189	0,386	0,179	0,346
-0,8	0,158	0,378	0,176	0,351	0,151	0,452	0,162	0,428
-0,9	0,112	0,440	0,155	0,442	0,103	0,523	0,137	0,527
-1	0,000	0,507	0,000	0,549	0,000	0,601	0,000	0,650



Rys. 2. Rozkłady naprężeń ścinających i normalnych wzdłuż spoiny klejowej

$$\tau_m = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \tau_{xy} dy \quad (37)$$

musi spełniać następujące równanie wynikające z warunków równowagi środkowej części tarczy

$$\tau_m 2c = qb \quad (38)$$

Tabela 2. Wartości maksymalne naprężeń ścinających w spoinie klejowej odniesione do ich wartości średniej

materiał tarczy	τ_{max}/τ_m					
	$\frac{a}{b} = 0,5$	$\frac{a}{b} = 1$	$\frac{a}{b} = 1,5$	$\frac{a}{b} = 2$	$\frac{a}{b} = 2,5$	$\frac{a}{b} = 3$
drewno sosnowe	1,336	1,124	1,192	1,228	1,248	1,260
ciało anizotropowe	2,444	1,284	1,308	1,324	1,340	1,348

skąd, po uwzględnieniu charakteryzującej naszą tarczę proporcji $c/b = 2$, otrzymamy

$$\tau_m = \frac{q}{4} \quad (39)$$

Rozkład naprężeń ścinających w spoinie jest tym bardziej równomierny, im iloraz τ_{max}/τ_m jest bliższy jedności. W tab.2 podano jego wartości dla poszczególnych przypadków tarczy. Jak widzimy, zarówno dla rozpatrywanych tarcz sosnowych jak i izotropowych, najbardziej równomierny rozkład naprężeń ścinających w spoinie klejowej występuje w tarczach określonych proporcją $a/b = 1$.

Jeżeli chodzi o naprężenia normalne, to ich maksymalne wartości przypadają na krańcowe punkty spoiny. Przy tym w tarczach sosnowych wartości te wzrastają ze wzrostem stosunku a/b , podczas gdy w tarczach izotropowych są największe dla $a/b = 0,5$.

Porównując obydwa rozpatrywane przypadki materiałowe tarcz, stwierdzamy bardziej równomierny rozkład naprężeń ścinających i mniejsze wartości maksymalne naprężeń normalnych w spoinie klejowej w przy-

padku tarcz drewnianych. Zatem w tarczach tych - z wytrzymałościowego punktu widzenia - spoina klejowa znajduje się w korzystniejszej sytuacji niż w tarczach izotropowych.

Zatrzymajmy się przy warunku brzegowym dotyczącym naprężeń normalnych na pionowych krawędziach tarczy. Jak zaznaczono w p.4 warunek ten jest spełniony w sposób przybliżony, tzn. wartości tych naprężeń różnią się nieco od zera. Przykładowo, dla tarczy sosnowej o parametrze $a/b = 2$, dla której obliczone za pomocą metody najmniejszych kwadratów wartości stałych E i F wynoszą:

$E = 0,257 \frac{1}{c}$, $F = 0$, naprężenia normalne σ_x na krawędziach tarczy $x = \pm(a+b)$ mają wartości przedstawione w tab. 3. Wartości te można uznać za pomijalnie małe w porównaniu np. z wartościami naprężeń normalnych w przekrojach $x = \pm b$, przytoczonymi również w tab. 3.

Tabela 3. Wartości naprężeń normalnych na krawędziach pionowych tarczy i w przekrojach $x = \pm b$

$\frac{y_i}{c}$	$\left(\frac{\sigma_x}{q}\right)_{\substack{x = \pm(a+b) \\ y = y_i}}$	$\left(\frac{\sigma_x}{q}\right)_{\substack{x = \pm b \\ y = y_i}}$
1	0,015	-0,417
0,8	-0,002	-0,305
0,6	-0,012	-0,210
0,4	-0,013	-0,131
0,2	-0,009	-0,061
0	0	0,002
-0,2	0,007	0,065
-0,4	0,012	0,132
-0,6	0,012	0,209
-0,8	0,003	0,302
-1	-0,013	0,414

Na zakończenie przedstawimy wnioski, które mogą być przydatne przy określaniu wymiarów sosnowych próbek blokowych dwuciętych oraz sklejaných równoległowiątkiście elementów niektórych złącz:

1. Rozkłady naprężeń ścinających i normalnych w spoinie klejowej

- zależą od stosunku a/b szerokości sklejaných elementów,
2. Najbardziej równomierny rozkład naprężeń ścinających w spoinie występuje przy stosunku $a/b = 1$,
 3. Rozkłady naprężeń w spoinie klejowej zależą od materiału sklejaných elementów, w przypadku drewna sosnowego różnią się zasadniczo od rozkładów występujących przy sklejaníu elementów izotropowych.

Literatura

- [1] Biekerman J.J. : The science of adhesive joints. Academic Press, New York and London 1968.
- [2] Chrulew W.M. : Proczność klejowych sojediniéni. Strojizdat, Moskwa 1973.
- [3] Dahlquist G., Björck A. : Metody numeryczne. PWN Warszawa 1983.
- [4] De Bruyne N.A., Houwink R. : Adhesion and adhesives. Elsevier Publishing Company, New York, Amsterdam, London, Brussels 1951.
- [5] Goland M., Reissner E. : The stresses in cemented joints. Journal of Applied Mechanics 1944, vol.11, nr 1, s.17-27.
- [6] Keylwerth R. : Die anisotrope Elastizität des Holzes und der Langenhölzer. VDI - Forschungsheft 430, Deutscher Ingenieur - Verlag, Düsseldorf 1951.
- [7] Kollmann F., Cote W.Jr : Principles of Wood Science and Technology, vol. I. Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1968.
- [8] Lechnicki S.G. : Teorja uprugosti anizotropnowo tieła. Nauka, Moskwa 1977.
- [9] Niskanen E. : On the distribution of shear stress in a glued specimen of isotropic or anisotropic material. The State Institute for Technical Research, Finland. Publikation 30, Helsinki 1955.
- [10] Niskanen E. : On the distribution of shear stress in a glued single shear test specimen of finnish birch timber. The State Institute for Technical Research, Finland. Publication 36, Helsinki 1957.
- [11] Nowacki W. : Dźwigary powierzchniowe. PWN, Warszawa 1979.
- [12] Sznurów Z.E. : Woprosy proczności klejowych sojediniéni. W: Kleje i technologija skleiwania, Oborongiz, Moskwa 1960.
- [13] Timoshenko S. : Teoria sprężystości. Arkady, Warszawa 1962.

- [14] Volkersen O. : Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. Luftfahrtforschung 1938, Bd. 15, nr 1-2, s.41-47.
- [15] Wilczyński A. : Model anizotropii właściwości sprężystych drewna. Zeszyty Problemowe Postępów Nauk Rolniczych, Wydział Nauk Rolniczych i Leśnych PAN 1987, nr 334 , s. 115-132.

ВЛИЯНИЕ ШИРИНЫ СКЛЕЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА НАПРЯЖЕНИЯ В КЛЕЕВОМ ШВЕ ДВУХСРЕЗНОГО БЛОЧНОГО СОСНОВОГО ОБРАЗЦА

Резюме

В работе рассмотрена деревянная пластинка, склеенная параллельноволоконисто касательными плоскостями из трех элементов, сделанных из соснового дерева. Пластинка, образующая симметричную механическую систему, подвергается сжатию, вызывающему сдвиг клеевых швов. Рассматривая дерево как упругое ортотропическое тело и не принимая во внимание влияния клеевого шва, определены составные напряжения в пластинке. Рассчитаны величины статических и нормальных напряжений, возникающих в клеевом шве для пластинок с разной шириной боковых элементов. Графически представлены распределения этих напряжений вдоль шва. Для сравнения рассмотрена также пластинка, выполненная из изотропного материала.