Romuald Gajewski
Jerzy Napiórkowski

ZASTOSOWANIE TEORII WYRAZÓW SKRAJNYCH
DO OBLICZEŃ TRWAŁOŚCI OBIEKTÓW TECHNICZNYCH

W wyniku badań otrzymuje się ogromny materiał eksperymentalny, który powinien być w określony sposób przygotowany do opracowania matematycznego w celu otrzymania charakterystyk sprawności i trwałości.

W zadaniach trwałości najczęściej spotykane są prawa rozkładu: normalny, logarytmo-normalny i Weibulla.

Obciążenia działające na poszczególne części maszyn roboczych mają charakter losowy, wobec tego i parametry określone podczas badań trwałości maszyny czy też współczynniki niezawodności, należy traktować jako zmienne losowe.

Przy programowaniu badań wytrzymałości zmęczeniowej, zasadniczą rolę odgrywają maksymalne rzadko występujące obciążenia, oraz prawdopodobieństwo ich występowania. Rozkłady uwzględniające te zmienne należą do rozkładów wielkości granicznych /ekstremalnych/.

W niniejszej pracy szczególną uwagę zwrócono na analizowanie rozkładów empirycznych wartości zmiennych losowych.

Obliczenia wytrzymałości elementów maszyn i urządzeń wykonuje się przy założeniu, że mamy do czynienia z najmniej sprzyjającym przypadkiem obciążeń zewnętrznych i własności wytrzymałościowych materiałów, tzn. w obliczeniach przyjmujemy, że obciążenia są możliwie największe a wytrzymałość materiałów najmniejsza. Wprowadzamy to po to, aby przy eksploatacji uniknąć uszkodzeń i awarii. Jednak w praktyce zarówno obciążenia, jak i wytrzymałość materiałów podlegają losowym zmianom zachodzącym pod wpływem działania różnorodnych czynników. Zmiany te określone na ogół na podstawie doświadczenia uwzględnione są we współczynniku bezpieczeństwa. Wynikom otrzymanym na podstawie takich danych można nadać odpowiedni charakter opierając się na odpowiedniej teorii statystycznej. W szczególności odnosi się to do takich obliczeń i doświadczeń, gdzie obciążenia i zachowanie się materiału podlegają wpływom czynników o charakterze wyraźnie losowym. Należy więc znaleźć nie tylko ekstremalne wartości rozważanych zmiennych /obciążenie, wytrzymałość itp./, ale obliczyć również prawdopodobieństwa występowania tych wielkości w praktyce. Przyjmując pewien określony poziom ufności, można określić maksymalne wartości rozważanych zmiennych tak, aby można było wykorzystać je przy projektowaniu odpowiednich maszyn i urządzeń.

Teoria wartości skrajnych traktuje o rozkładzie ekstremów zmiennych losowych, którymi mogą być: czas poprawnej pracy, trwałość, wytrzymałość, obciążenie, czas naprawy itp., oraz daje odpowiedź na pytania:

- jaka jest ogólna ocena niezawodności obiektu sądząc po przebiegu dystrybuanty aproksymowanej prostą,
- jaka jest przeciętna trwałość obiektu,
- jaka jest wartość modalna trwałości obiektu,
- jakie jest prawdopodobieństwo tego, że poprawny czas pracy obiektu mieści się w pewnym określonym czasie.

Z ogólnej teorii rozkładów skrajnych elementów próbki wynika, że istnieją trzy typy rozkładów asymptotycznych przy $N \to \infty$:

- rozkład Gumbela /podwójny rozkład wykładniczy albo rozkład pierwszego typu/,
- rozkład Frecheta /rozkład drugiego typu/,
- rozkład Weibulla /rozkład trzeciego typu/.

Rozkład Gumbela i Weibulla mają duże znaczenie w zastosowaniach technicznych. W praktyce rozpatrywana liczba zmiennych jest duża /wartości minimalne względnie maksymalne/, a korzystanie ze wzorów asymptotycznych dla rozkładów elementów skrajnych nie wymaga analizowania rozkładu samych zmiennych.

Ogólna charakterystyka rozkładu Gumbela

Niech zmienna X_i przyjmuje wartości z dowolnego nieskończonego przedziału. Maksimum i minimum tej zmiennej może być dowolnie dużą liczbą co do wartości bezwzględnej. Niech każda ze zmiennych X_i ma rozkład wykładniczy

$$(1) \qquad P/x/ = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 - e^{-x/\gamma} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

gdzie $\gamma > 0$ - parametr równy wartości oczekiwanej.

Gęstość zmiennej losowej X_i ma postać

$$(2) \qquad f/x/ = P'/x/ = \frac{1}{\gamma} e^{-x/\gamma}$$

Stąd wartość oczekiwana /średnia/ wyraża się wzorem:

$$(3) \qquad E/x/ = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \gamma\int_0^\infty e^{-t}\cdot t\cdot dt = \gamma$$

przy podstawieniu $\frac{x}{\gamma} = t$.

Minimum $/U_{in}/$ zmiennych X_i ma rozkład asymptotyczny, który jest również rozkładem wykładniczym określonym wzorem

$$(4) \qquad P\,/U_{in} < x/ \begin{cases} 1 - \exp\,/- \dfrac{(x-a)^{\alpha}}{y}/ & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x < a \end{cases}$$

gdzie: a jest liczbą mniejszą od każdego X_i,

$$\gamma = \frac{1}{c \cdot n} \qquad\qquad c > 0$$

c - współczynnik kątowy stycznej do krzywej $y = P/x/$ w punkcie $/a,\ 0/$

Rozkład maksimum $/U_{nn}/$ zmiennych X_i jest rozkładem określonym wzorem

$$(5) \qquad P\,/U_{nn} < x/ = P^{n}\,/x/$$

Określa to prawdopodobieństwo jednoczesnego zajścia nierówności

$$X_1 < x,\ X_2 < x,\ \dots,\ X_n < x$$

co jest warunkiem koniecznym i dostatecznym tego, by $U_{nn} < x$.
Po odpowiednim przekształceniu wzoru /1/ otrzymamy:

$$(6) \qquad P\,/U_{nn} < x/ = \begin{cases} \left(1 - e^{-\frac{x}{\gamma}}\right)^{n} & \text{dla } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Wynika stąd, że dla dowolnej stałej liczby $x > 0$ przy $n \to \infty$

$$P\,/U_{nn} < x/ \to 0 \qquad \text{i} \qquad P\,/U_{nn} \geqslant x/ \to 1$$

gdyż przy dostatecznie dużym n zmienna losowa U_{nn} na pewno przekroczy dowolną z góry zadaną granicę. Wartość oczekiwana zmiennych U_{nn} również wzrasta ze wzrostem n i równa jest

$$E /U_{nn}/ = \gamma_n \approx \gamma \cdot \ln n$$

Po podstawieniu do /6/ $x = \gamma \ln z + z$ /z - dowolnym znaku/ otrzymamy

$$P /U_{nn} < x/ = P /U_{nn} < \gamma \ln n + z/ = /1 - e^{\frac{-\gamma \ln n - z}{\gamma}}/^n =$$

$$= /1 - e^{-\ln n - \frac{z}{\gamma}}/^n = /1 - \frac{e^{-\frac{z}{\gamma}}}{n}/^n \longrightarrow e^{-e^{-\frac{z}{\gamma}}}$$

przy $n \longrightarrow \infty$

Wynika z tego, że

(7) $$P /U_{nn} < \gamma \ln n + z/ \longrightarrow e^{-e^{-\frac{z}{\gamma}}}$$

Jest to tzw. podwójny rozkład wykładniczy albo rozkład pierwszego typu.

Rozkład pierwszego typu ma postać

(8) $$P_{I,n}/x/ = e^{-e^{-y}},$$

gdzie $y = \alpha /x-q/$, $\alpha > 0$ i q jest pewną stałą.

Największy element przy dużych wartościach n ma rozkład asymptotyczny określony wzorem (8) jeśli dystrybuanta $P/x/$ każdej ze zmiennych X_i /i = 1, 2, ... , n/ dąży do jedności przy $x \longrightarrow \infty$.

Podobnie minimum U_{1n} zmiennych X_i przy $x \longrightarrow -\infty$ ma rozkład asymptotyczny określony wzorem

(9) $$P_{I,1}/x/ = 1 - e^{-e^{-y}}$$

jeśli dystrybuanta $P/x/$ dąży do zera.

Rozkłady $P_{I,1}/x/$ i $P_{I,n}/x/$ są niesymetryczne i nieograniczone, jednakże przy dużych y co do wartości bezwzględnej funkcje te niewiele różnią się od zera /przy $y<0$/ i niewiele różnią się od jedynki /przy $y>0$/. Gdy $x = q$ obie te funkcje równe są $\frac{1}{e} \approx 0,3679$, a wartość $x = q$ jest modą rozkładów określonych wzorami /8/ i /9/. Wielkość y jest unormowanym odchyleniem od mody. Modą rozkładu teoretycznego nazywamy najbardziej prawdopodobną wartość zmiennej losowej, a rozkładu empirycznego wielkość, której odpowiada największa częstość.

Wyznaczanie wskaźników trwałości obiektu

Jako wskaźnik niezawodności można przyjąć prawdopodobieństwo poprawnej pracy jakiegoś elementu maszyny w określonym przedziale czasu lub jego trwałość.

W celu oszacowania parametrów prawdopodobieństwa i przedstawienia na wykresie wyników doświadczeń zmęczeniowych można zastosować metodę wartości skrajnych. Metoda ta składa się z następujących etapów:

1. Uporządkowanie w relacji malejącej /dla minimów/ lub rosnącej /dla maksimów/ zaobserwowano do chwili zniszczenia liczby cykli /lub danych dotyczących badanej zmiennej losowej, otrzymanych z próbki, a pochodzących z obserwacji niezależnych/.

$$N_1 < N_2 < \ldots < N_n,$$

gdzie: n - liczba elementów poddawanych doświadczeniu.

2. Obliczenie wartości logarytmów liczb występujących w ciągu wartości uporządkowanych, czyli obliczenie liczby $x = \log N$

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m < \dots < x_n ,$$

gdzie $x_m = \log N_m$ i $m = 1, 2, \dots , n.$

3. Każdej liczbie N_m /odpowiednio x_m/ przyporządkowujemy odpowiednią liczbę

$$1 - \frac{m}{n+1} = p_m$$

4. Dla każdej liczby p_m obliczamy y_m.

Każdą wartość y_m można obliczyć korzystając z odpowiedniej tablicy, względnie przez dwukrotne logarytmowanie wzoru

$$p_m = e^{-e^{y}} ,$$

a mianowicie

$$p_m = e^{-e^{y_m}}$$

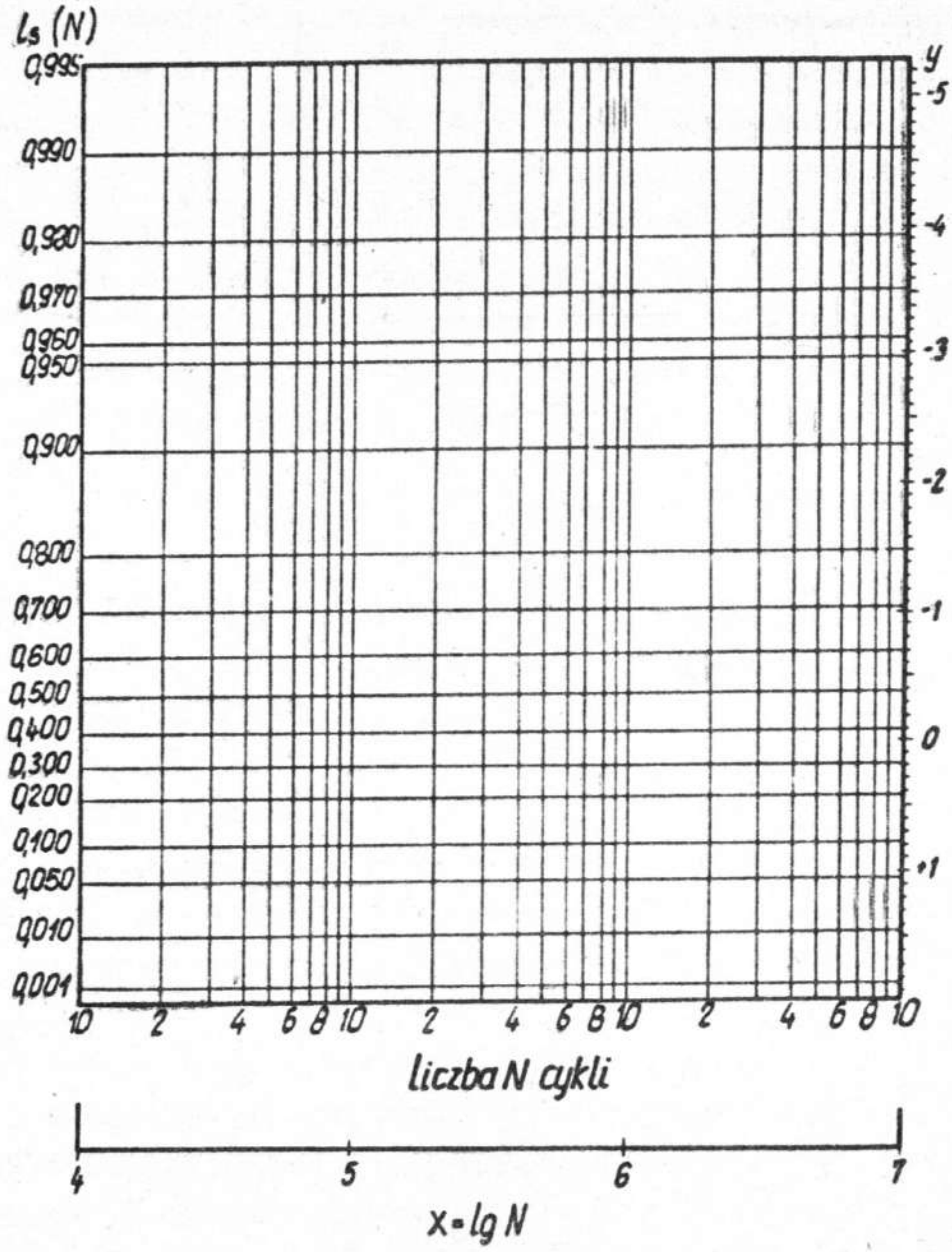
$$p_m \cdot e^{e^{y_m}} = 1$$

$$\ln p_m + e^{y_m} = 0$$

$$e^{y_m} = - \ln p_m$$

$$y_m = \ln /- \ln p_m/ \tag{10}$$

5. Otrzymane wyniki zaznaczamy na odpowiedniej siatce /rys.1/. Na osi poziomej o zwykłej skali należy odłożyć wartości x_m, albo na osi o skali logarytmicznej wartości N_m. Na osi pionowej należy odłożyć wartości y_m.



$l_s(N)$
0,995
0,990
0,980
0,970
0,960
0,950
0,900
0,800
0,700
0,600
0,500
0,400
0,300
0,200
0,100
0,050
0,010
0,001
y
-5
-4
-3
-2
-1
0
+1
10 2 4 6 8 10 2 4 6 8 10 2 4 6 8 10
liczba N cykli
4
5
6
7
x = lg N

6. Oszacowanie parametrów rozkładu ekstremum obejmuje następujące etapy:

- obliczenie średniej arytmetycznej $\overline{\log N_m}$ i odchylenia standardowego s /log N_m/ zmiennej $x = \log N$
- odczytanie pomocniczych wartości $\overline{y_N}$ i σ_N z tablicy 1, tzn. wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego zmiennych y_k /k = 1, 2, ... , N/
- oszacowanie parametrów w równaniu $y = \alpha_s /x - u_s/$ na podstawie wzorów

(11) $$\frac{1}{\hat{\alpha}_s} = \frac{s\ /\log N_m/}{\sigma_n}$$

i

$$U_s = \overline{\log N_m} + \overline{y_m} \cdot \frac{1}{\hat{\alpha}_s}$$

7. Wykreślenie tzw. prostej wyrównującej o równaniu

$$y = \alpha_s /x - u_s/$$

(12) albo $$x = u_s + \frac{y}{\alpha_s}$$

gdzie, $u_s = \log V_s$, a V_s jest wartością N odpowiadającą prawdopodobieństwu niezniszczenia równemu $e^{-1} = 0,36788$.

Prostą $y = \alpha_s /x - u_s/$ można też znaleźć przy pomocy metody najmniejszych kwadratów. Gdy przyjmiemy, że

$$\alpha_s = a$$

i $$1 - \alpha_s \cdot u_s = b$$

to otrzymamy prostą o równaniu

$$y = ax + b \tag{13}$$

Parametry a i b tej prostej są nieznane. Obliczamy je na podstawie następujących wzorów

$$a = \frac{n \sum y_i x_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - /\sum x_i/^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum y_i \cdot x_i}{n \sum x_i^2 - / \sum x_i/^2}$$

Prosta wyrażona równaniami (12) lub (13) opisuje w przybliżeniu zależność prawdopodobieństw p_m od liczb N cykli do chwili zniszczenia przy każdej wybranej wartości amplitudy zmian naprężenia w czasie cyklu. Ta zależność pozwala tworzyć hipotezy odnośnie tego, jakie naprężenia i przy jakich liczbach cykli odpowiadają prawdopodobieństwu niezniszczenia wzorca /prawdopodobieństwu bliskiemu 1/.

Literatura

1. Gumbel E.: Statistics of Extremes. New York, Columbia University Pres 1962.
2. Gumbel E.: Statistical Theory of Extreme Values and Some Applications. Washington 1964.
3. Smirnow N.W., Dunin-Barkowski I.W.: Krótki kurs statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych. PWN, W-wa 1966.
4. Weibull W.: Fatigue Testing and Analysis of Results. Pergamon Press, London 1961.

Średnie y_N i odchylenia standardowe σ_N zmiennych y_k /k = 1, 2, ... , N/

Tablica 1.

N	y_N	σ_N	N	y_N	σ_N	N	y_N	σ_N
15	0,5128	1,0206	43	0,5453	1,1480	74	0,5557	1,1890
20	0,5236	1,0628	44	0,5458	1,1499	76	0,5561	1,1906
21	0,5252	1,0695	45	0,5463	1,1519	78	0,5565	1,1923
22	0,5268	1,0755	46	0,5468	1,1538	80	0,5569	1,1938
23	0,5282	1,0812	47	0,5473	1,1557	82	0,5572	1,1953
24	0,5296	1,0865	48	0,5477	1,1574	84	0,5576	1,1967
25	0,5309	1,0915	49	0,5481	1,1590	86	0,5580	1,1980
26	0,5320	1,0961	50	0,5485	1,1607	88	0,5583	1,1994
27	0,5332	1,1004	51	0,5489	1,1623	90	0,5586	1,2007
28	0,5343	1,1047	52	0,5493	1,1638	92	0,5589	1,2020

Tablica 1. cd.

N	y_N	N	N	y_N	N	N	y_N	N
29	0,5353	1,1086	53	0,5497	1,1653	94	0,5592	1,2032
30	0,5362	1,1124	54	0,5501	1,1667	96	0,5595	1,2044
31	0,5371	1,1159	55	0,5504	1,1681	98	0,5598	1,2055
32	0,5380	1,1193	56	0,5508	1,1696	100	0,5600	1,2065
33	0,5388	1,1226	57	0,5511	1,1708	150	0,5646	1,2253
34	0,5390	1,1255	58	0,5515	1,1721	200	0,5672	1,2360
35	0,5403	1,1285	59	0,5518	1,1734	250	0,5688	1,2429
36	0,5410	1,1313	60	0,5521	1,1747	300	0,5699	1,2479
37	0,5418	1,1339	62	0,5527	1,1770	400	0,5714	1,2545
38	0,5424	1,1363	64	0,5533	1,1793	500	0,5724	1,2588
39	0,5430	1,1388	66	0,5538	1,1814	750	0,5738	1,2651